

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЁВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

Буханько Анастасия Андреевна

**Теория пластического течения в механике  
разрушения и её приложения**

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н., профессор

Хромов Александр Игоревич

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	6
<b>Глава 1. Основы деформационно-энергетического подхода . . .</b>	<b>15</b>
1.1. Основные соотношения вдоль характеристических линий . . . .	16
1.1.1. Соотношения вдоль характеристик в условиях плоской деформации . . . . .	17
1.1.2. Соотношения вдоль характеристик в условиях осесимметричной деформации . . . . .	19
1.2. Удельная работа внутренних сил в окрестности особенностей поля скоростей перемещений . . . . .	20
1.2.1. Диссипация энергии на линиях разрыва поля скоростей перемещений . . . . .	20
1.2.2. Диссипация энергии в окрестности центра веера линий скольжения в условиях плоской деформации . . . . .	22
1.2.3. Диссипация энергии в окрестности центра веера линий скольжения в условиях осесимметричной деформации . . . . .	25
1.3. Поля деформаций при одноосном деформировании плоских и цилиндрических образцов . . . . .	26
1.3.1. Накопление деформаций в однородном поле тензора скорости деформации в условиях плоской деформации . . . . .	28
1.3.2. Накопление деформаций в однородном поле тензора скорости деформации в условиях осесимметричной деформации . . . . .	30
1.3.3. Поля деформаций на линиях разрыва поля скоростей перемещений в условиях плоской деформации . . . . .	32

1.3.4.	Поля деформаций в окрестности центра веера линий скольжения в условиях плоской деформации . . . . .	36
1.4.	Критерии выбора предпочтительного пластического течения в условиях плоской деформации . . . . .	38
1.5.	Выводы к первой главе . . . . .	39
<b>Глава 2. Задачи, моделирующие процессы деформирования и разрушения . . . . .</b>		
2.1.	Внедрение клина в жёсткопластическую полуплоскость . . . . .	42
2.2.	Раздавливание клина . . . . .	46
2.2.1.	Раздавливание острого клина гладким плоским штампом . . . . .	46
2.2.2.	Раздавливание усечённого клина гладким плоским штампом . . . . .	53
2.3.	Одноосное растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами . . . . .	60
2.3.1.	Решения Е. Ли . . . . .	60
2.3.2.	Решение О. Ричмонда . . . . .	65
2.3.3.	Несимметричное пластическое течение . . . . .	70
2.4.	Схема деформирования и разрушения плоского образца . . . . .	78
2.4.1.	Критерии зарождения и распространения трещин . . . . .	80
2.5.	Поведение материальных частиц на пересечениях особенностей поля скоростей перемещений . . . . .	82
2.6.	Выводы ко второй главе . . . . .	84
<b>Глава 3. Поверхность нагружения, условие пластичности и энергетическое условие развития пластического течения . . . . .</b>		
		86

3.1.	Поверхность деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела и уравнение линий уровня . . . . .	90
3.2.	Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверх- ности деформационных состояний . . . . .	95
3.3.	Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхно- сти деформационных состояний, при различных условиях де- формирования . . . . .	98
3.3.1.	Плоская деформация . . . . .	103
3.3.2.	Осесимметричная деформация и условие полной пла- стичности . . . . .	111
3.3.3.	Плоское напряжённое состояние . . . . .	120
3.3.4.	Растяжение с кручением . . . . .	123
3.4.	Энергетическое условие развития пластического течения . . .	124
3.5.	Выводы к третьей главе . . . . .	127
<b>Глава 4.</b>	<b>Предельное состояние пластических тел . . . . .</b>	<b>129</b>
4.1.	Деформационно-энергетический подход и малоцикловая уста- лость материалов . . . . .	132
4.2.	Упрочняющееся жёсткопластическое тело и параметр упрочне- ния . . . . .	137
4.3.	Пластическое течение при обработке жёсткопластической по- луплоскости выглаживанием . . . . .	142
4.3.1.	Поля деформаций и диссипация энергии в пластической области . . . . .	144
4.3.2.	Определение повреждаемости материала в поверхност- ном слое . . . . .	149
4.4.	Выводы к четвёртой главе . . . . .	151

<b>Глава 5. Распространение трещины в упругопластическом материале</b> . . . . .	153
5.1. Установившееся движение трещины внутри упругопластического тела . . . . .	155
5.1.1. Распределение работы внутренних сил в окрестности вершины трещины . . . . .	158
5.1.2. Поле деформации в окрестности вершины трещины . . . . .	161
5.1.3. Пластический $J$ -интеграл . . . . .	164
5.1.4. Связь удельной работы внутренних сил $W$ и пластического $J$ -интеграла . . . . .	168
5.2. Неустойчивое движение углового выреза внутри упругопластического тела . . . . .	170
5.3. Выводы к пятой главе . . . . .	173
<b>Заключение</b> . . . . .	175
<b>Список литературы</b> . . . . .	177
<b>Приложение А. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных</b> . . . . .	206

# Введение

**Актуальность темы исследования и степень её разработанности.** Одной из основных задач механики деформируемого твёрдого тела является создание фундаментальных основ для описания процессов разрушения твёрдых тел при их деформировании, то есть разработка основ механики разрушения (построение моделей и алгоритмов расчёта конструкций и технологических процессов при больших пластических деформациях с учётом разрушения). Теория пластического течения, как один из важных разделов механики деформируемого твёрдого тела, позволяет описывать поведение реальных материалов при различных напряжённых состояниях в условиях пластического деформирования. В частности, теория пластичности позволяет решать геометрически нелинейные задачи, учитывающие изменение конфигурации частиц тела в пространстве, то есть учитывать изменения геометрии деформируемого тела; использовать в качестве меры деформаций тензоры конечных деформаций; получать аналитические решения различных задач.

Развитие фундаментальных соотношений теории пластического течения и пластических аспектов механики разрушения связано с именами А. Надаи [108], Ю. Н. Работнова [131, 132], Р. Хилла [155], Л. М. Качанова [79, 80], А. Ю. Ишлинского [73], Д. Д. Ивлева [69–71, 74], В. В. Соколовского [146], Г. И. Быковцева [47], А. И. Хромова [156, 172], Ю. Н. Радаева [133, 136], Р. И. Непершина [65], Ю. В. Немировского [109], Б. Д. Аннина [5], Г. П. Черепанова [6, 175], С. И. Сенашова [60, 143], Дж. Райса [140], Ф. Мак-Клинтока [99], Дж. Ф. Нотта [116], Д. Броека [8], Е. М. Морозова [120–122], Ю. Г. Матвиенко [103], Н. Ф. Морозова [107] и других известных учёных [59, 67, 68, 129, 130, 153, 177].

Состояние развития механики разрушения определяется использованием в качестве теоретической базы деформационной теории пластичности, в кото-

рой, как правило, не учитывается процесс разгрузки материала, что сводит используемую теорию к нелинейной теории упругости. Решение конкретных задач о разрушении связано с использованием в качестве меры деформаций тензора малых деформаций. Этот подход приводит к ряду физических противоречий, в частности, к неограниченному росту напряжений и накопленной диссипации энергии в окрестности вершины трещины. Необходимо отметить, что с физической точки зрения разрушается не область, а некоторая совокупность частиц в окрестности вершины трещины, то есть разрушение связывается с нарушением сплошности среды, когда две бесконечно близкие частицы расходятся на конечное расстояние. Этот процесс можно связать с деформацией сплошной среды на разрывах поля скоростей перемещений. Такая возможность отсутствует в деформационной теории пластичности. Кроме того, известно, что при разрушении в окрестности вершины трещины экспериментально практически во всех материалах наблюдается наличие пластической области (хотя и достаточно малых размеров).

Известно, что разрушение представляет собой сложный, многоступенчатый процесс, который начинается задолго до появления видимых трещин. Так как разрушение происходит в результате развития содержащихся в теле реальных дефектов, при оценке прочности необходимо учитывать имеющиеся в теле трещины, а следовательно, необходимо изучение влияния первоначальной обработки материала на его трещиностойкость (упрочнение/разупрочнение материала при выглаживании, прокатке, обработке давлением и т.п.). Согласно Е. М. Морозову [120] теория распространения трещин в пластических материалах должна включать в себя по крайней мере два элемента: решение упругопластической задачи с учётом конечности пластической деформации и с удовлетворением граничных условий на упругопластической границе; нахождение условия образования макротрещины в материале, который претерпел значительную деформацию.

Основным направлением исследований в механике разрушения являются процессы распространения трещин. Это направление подробно разработано и включает линейную и квазилинейную механику разрушения (теория Гриффитса и теория, учитывающая поправку Ирвина на пластические деформации), и нелинейные процессы распространения трещин (критерий раскрытия трещины, инвариантный интеграл Черепанова-Райса), которые изложены в большом количестве работ [6, 8, 49, 103, 116, 121, 122, 153, 175, 177, 183, и др.]. Если размеры пластической области велики (области, где нарушаются соотношения линейной механики разрушения), то может использоваться нелинейная модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для плоского напряжённого состояния (пластическая зона вырождается в отрезок, продолжающим трещину) или инвариантный  $J$ -интеграл.

Вместе с тем вопрос описания закономерностей и периода зарождения трещин в окрестности концентраторов напряжений остаётся в основном открытым [103]. Исключение представляет гипотеза С. В. Серенсена [144, 145] о том, что зарождение трещины связано с исчерпанием состояния пластичности, которое в дальнейшем будем называть предельным состоянием материала. То есть считается, что при достижении предельного состояния пластическое течение возможно лишь при нарушении сплошности материала. Как правило, изучение предельных состояний материала связано с теорией прочности. Способы описания предельного состояния рассматривались в работах [58, 124, 125, 127].

Проблема достижения материалом предельного состояния в настоящее время рассматривается, как правило, эмпирически. Экспериментальные подходы определения предельных состояний связаны с исследованиями в рамках теории малоциклового усталости при разрушении материалов, зависящих от их пластических свойств и мало от упругих констант. В работах [184, 202, 203] вводится критериальная величина разрушения — удельная работа внутрен-

них сил, связанная с упрочнением материала. Обоснованность выбора удельной работы внутренних сил в качестве критериальной величины связана с зависимостью диссипации энергии от истории деформирования материала [153]. Отметим, что деформации не могут быть выбраны в качестве критериальной величины для описания процессов разрушения, поскольку могут обращаться в нуль, тогда как диссипация энергии может только накапливаться при деформировании.

Для устранения указанных недостатков в работе предлагается взгляд на механику разрушения с точки зрения теории пластического течения. Обоснованность использования теории пластического течения для описания процессов разрушения подтверждается основными соотношениями теории малоциклового усталости и механики распространения трещин. Теория пластичности, как раздел механики деформируемого твёрдого тела, позволяет дать ясное описание процесса разрушения — процесс нарушения сплошности среды, которое предполагается необратимым. Этот подход приводит к единой критериальной величине, определяющей момент зарождения трещины и условия распространения трещины.

В работе процесс разрушения предлагается рассматривать в два этапа: доведение материала до предельного состояния (когда деформирование не возможно без разрушения) и дальнейшее развитие течения (распространения трещины). Первый процесс связывается с накоплением необратимых повреждений, определяемых деформированием материала. Этот необратимый процесс связывается теорией пластического течения с необратимым термодинамическим процессом рассеивания работы внутренних сил на пластических деформациях, который определяется ассоциированным законом пластического течения. Экспериментальной основой здесь является теоретическая трактовка поведения материала при малоциклового усталости, которое в основном зависит от пластических свойств материала и мало от упругих. Второй про-

цесс — распространение макротрещины, также описывается теорией пластического течения, как течение на разрывах поля скоростей перемещений. Для чего необходимо допустить существование таких разрывов. Это накладывает определённые ограничения на модель теории пластического течения (в частности, она должна приводить к уравнениям гиперболического, а не эллиптического типа).

Основные результаты получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проектов № 01-01-00717-а «Влияние электротермического воздействия на процесс локализации пластических деформаций и разрушение материалов», № 04-01-00102-а «Концентраторы деформаций», № 08-08-99042-р\_офи «Определение деформационных характеристик разрушения конструкционных материалов при малоцикловых пластических деформациях», № 11-08-00580-а «Пластические критерии разрушения», № 12-01-31283-мол\_а «Поля деформаций и условия разрушения в окрестности вершины осесимметричной трещины для пластических тел»; и неоднократно поддерживались фондом для представления на научных мероприятиях, проводимых в России и за рубежом: проекты №№ 04-01-10654-з, 05-01-10561-з, 06-01-10595-з, 07-08-08117-з, 08-08-09206-моб\_з, 09-08-09280-моб\_з, 09-08-16025-моб\_з\_рос, 10-08-09370-моб\_з, 11-08-16060-моб\_з\_рос, 12-08-09267-моб\_з; а также при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проекта № 2.1.1/14141 «Теоретические и экспериментальные исследования влияния диссипативных процессов на механические характеристики и разрушение материалов». Во всех проектах автор принимал участие в качестве руководителя или ответственного исполнителя.

**Целью диссертационной работы** является описание процессов зарождения и распространения трещин на основе теории пластического течения в рамках модели жёсткопластического тела.

**Основными задачами работы** являются:

1. Формулировка задач, моделирующих процессы деформирования и разрушения материала в рамках теории пластического течения на основе модели жёсткопластического тела.
2. Определение критериальной величины, характеризующей процессы доведения материала до предельного состояния и распространения трещины.
3. Установление связи выбранной критериальной величины с традиционными критериями механики разрушения.
4. Формулировка подхода к описанию предельного состояния упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела.
5. Определение поверхности нагружения и условия пластичности, сохраняющих гиперболичность определяющих соотношений теории пластического течения.

**Методология и методы исследования.** Задачи исследования решаются на основе деформационно-энергетического подхода к описанию процессов разрушения, сформулированного в рамках теории пластического течения, теории малоциклового усталости и механики разрушения. С помощью методов, основанных на соотношениях теории пластического течения в рамках модели жёсткопластического тела, получены аналитические решения задач о локализации пластических деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений.

**Научная новизна** состоит в описании процессов достижения материалом предельного состояния с позиций теории пластического течения в рамках модели упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела, и понимании предельного состояния, как состояния предельного упрочнения (исчерпание пластичности материала).

Процесс распространения трещины рассматривается в рамках теории идеального жёсткопластического тела, что является новой областью прило-

жения модели идеального жёсткопластического тела.

В рамках предлагаемого исследования поверхность нагружения и условие пластичности определяются соотношениями, содержащими второй и третий инварианты девиатора напряжения, что приводит к нарушению условия пропорциональности компонент тензора скорости деформации и девиатора напряжения; изменяется формулировка энергетического условия развития пластического течения для упрочняющегося тела. Добавление энергетического условия к системе уравнений в напряжениях приводит к новым постановкам задач теории пластического течения.

В работе за меру деформаций выбирается тензор конечных деформаций и рассматривается траектория движения частиц, что позволяет аналитически получить распределение полей деформаций и удельной работы внутренних сил (выбранную за единую критериальную величину), и исключить особенность (сингулярность) удельной диссипации энергии, в частности, в окрестности вершины трещины.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

Предлагаемый в исследовании подход позволяет описать процесс разрушения как совокупность процессов достижения материалов предельного состояния и распространения трещины с единых позиций, даёт новые методы расчёта модельных и прикладных задач теории пластического течения и механики разрушения.

Прикладное направление связано с приложением теории пластического течения к задачам технологической и эксплуатационной наследственности, которая определяется деформированием материала.

### **На защиту выносятся следующие положения:**

1. Методы аналитического расчёта распределения деформаций и удельной диссипации энергии в задачах, моделирующих процессы деформирования и разрушения материала.

2. Поверхность нагружения и условие пластичности, связанные с линиями уровня поверхности деформационных состояний несжимаемого жёстко-пластического тела, сохраняющие гиперболичность определяющих соотношений теории пластического течения.

3. Критерии разрушения материала: доведения до предельного состояния (зарождение трещины) и образования новых свободных поверхностей (распространение трещины). В качестве критериальной величины выбрана удельная работа внутренних сил, что обосновывается её связью с термодинамической необратимостью процесса разрушения.

4. Подход к описанию предельных состояний пластических тел в пространстве главных напряжений, позволяющий учитывать эффект Баушингера и конечность деформаций материала, и обобщающий соотношения малоциклового усталости на произвольные пространственные процессы деформирования.

5. Связь новой критериальной величины с традиционными критериями механики разрушения.

**Степень достоверности результатов.** Использование теории пластического течения для описания процессов разрушения обосновано основными соотношениями малоциклового усталости и механики разрушения.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертации докладывались на международных и всероссийских конференциях и семинарах [10, 14–17, 20–25, 27, 28, 31–34, 38, 39, 42–45, 76, 90, 97, 123, 160, 162, 166, 168, 169, 176, 181, 187, 190], а также за рубежом [30, 37, 180, 186, 188, 189, 191–193, 195], в том числе на Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006, 2011); Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2006, 2008–2011, 2013); ICF Interquadrennial Conference. Fracture Mechanics in Design of Fracture Resistant Materials and Structures

(Москва, 2007); Всероссийской и международной конференциях «Успехи механики сплошных сред», приуроченных к юбилею академика В. А. Левина (Владивосток, 2009, 2014); международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», посвящённой 80-летию Д. Д. Ивлева (Воронеж, 2010); Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления», посвящённая 75-летию со дня рождения академика В. П. Мясникова (Владивосток, 2011); Третьей международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 2012); международной конференции «Живучесть и конструкционное материаловедение» (Москва, 2012); Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвящённой 75-летию со дня рождения д-ра физ.-мат. наук, профессора Г. И. Быковцева (Самара, 2013); международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий» (Чебоксары, 2013); XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Аделаида, Австралия, 2008); 7th European Solid Mechanics Conference (Лиссабон, Португалия, 2009); 8th European Solid Mechanics Conference (Грац, Австрия, 2012) и другие.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 54 работах, из них 18 статей в рецензируемых научных изданиях [11–13, 18, 19, 26, 29, 35, 36, 40, 41, 91, 161, 163–165, 167, 170], 36 статей в сборниках трудов конференций и тезисов докладов.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, автор участвовал в постановке задач и их решении, как основной исполнитель.

## Глава 1

# Основы деформационно-энергетического подхода

Теория пластического течения является одним из фундаментальных направлений механики деформируемого твёрдого тела. Основные положения теории позволяют описывать поведение реальных материалов при различных напряжённых состояниях в условиях пластического деформирования. Известны различные модели пластических тел, гипотезы которых используются для описания поведения различных материалов и в различных областях их применения. Среди таких моделей можно выделить модель упругопластического тела, когда упругие и пластические деформации предполагаются одного порядка; модель упрочняющегося жёсткопластического тела, учитывающая повышение предела текучести при повторном нагружении; и, наконец, модель идеального жёсткопластического тела, в рамках которой принято не учитывать упругие деформации в виду их малости по сравнению с пластическим. Отметим, что идеальное пластическое тело является своего рода предельной моделью по отношению к другим более сложным моделям деформируемых сред (упругопластического тела, упрочняющегося жёсткопластического тела, и т.п.) [130]. Кроме того, модель жёсткопластического тела позволяет определять аналитически распределения полей деформаций и диссипации энергии в пластической области и на особенностях поля скоростей перемещений, с учётом изменения геометрии формы тела.

В работе используются следующие основные положения теории пластического течения в рамках модели жёсткопластического тела [79, 155]:

– материал изначально и в процессе деформирования изотропный и однородный;

– пластическое деформирование не зависит от гидростатического давления;

– упругие деформации малы по сравнению с пластическими, и не учитываются;

– в пластической области материал не сжимаем, то есть выполняется условие несжимаемости

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0. \quad (1.1)$$

– пластическое течение развивается по нормали к поверхности текучести, то есть справедлив ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $f$  — функция, определяющая закон пластичности;  $\lambda'$  — некоторый положительный скалярный множитель;

– поверхность текучести, определяемая функцией  $f(\sigma_{ij})$ , является выпуклой;

– мощность диссипации работы внутренних сил на пластических деформациях определяется соотношением

$$\dot{W}_p = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \lambda' \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.3)$$

Согласно [129] условие изотропии не требует, чтобы пределы текучести на растяжение и сжатие материала были одинаковы.

## 1.1 Основные соотношения вдоль характеристических линий

Одним из распространённых методов решения задач теории пластичности является метод характеристик (линий скольжения), в частности, при

моделировании технологических процессов обработки материалов давлением. Использование данного метода связывается, в первую очередь, с возможностью интегрирования систем дифференциальных уравнений вдоль линий скольжения. Известно, что для того, чтобы задачи о предельном равновесии (начале пластического течения) в условиях плоской деформации и осесимметричной деформации были статически определимы, необходимо существование двух различных вещественных семейств характеристических линий. При этом соответствующая система уравнений является системой гиперболического типа. В [79, 155] показано, что в условиях плоской и осесимметричной деформаций семейства характеристических линий совпадают с ортогональными семействами линий скольжения  $\alpha$ ,  $\beta$ . Ниже приводятся основные соотношения, выполняющиеся вдоль характеристических линий, в условиях плоской и осесимметричной деформаций, используемые в работе.

### 1.1.1 Соотношения вдоль характеристик в условиях плоской деформации

В условиях плоской деформации принято, что два семейства линий скольжения  $\alpha$ ,  $\beta$  образуют правую систему координат. Обозначим через  $\varphi$  угол наклона касательной к линии  $\alpha$  относительно оси  $x$ , отсчитываемый против движения часовой стрелки. Дифференциальные уравнения семейств линий скольжения в плоскости  $x$ ,  $y$  имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \varphi \quad \text{вдоль линии } \alpha, \\ \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{вдоль линии } \beta.\end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжения в декартовой системе координат опре-

деляются выражениями

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma - k \sin 2\varphi, \\ \sigma_y = \sigma + k \sin 2\varphi, \\ \tau_{xy} = k \cos 2\varphi, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ ,  $k = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ , связываемые с углом  $\varphi$  следующими соотношениями

$$\sigma - 2k\varphi = \text{const.} \quad \text{вдоль линии } \alpha,$$

$$\sigma + 2k\varphi = \text{const.} \quad \text{вдоль линии } \beta.$$

Известно, что эти соотношения эквивалентны уравнениям равновесия [79, 155]. При этом значения констант изменяются при переходе между линиями одного семейства к другому.

Проекции вектора скорости перемещения  $u$  и  $v$ , отнесённые к линиям  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяют уравнениям Гейрингер

$$\begin{aligned} du - v d\varphi &= 0 \quad \text{вдоль линии } \alpha, \\ dv + u d\varphi &= 0 \quad \text{вдоль линии } \beta; \end{aligned} \quad (1.5)$$

и связаны с проекциями скорости перемещения вдоль декартовых осей  $x$  и  $y$  соотношениями

$$\begin{cases} u = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \\ v = -V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} V_x = u \cos \varphi - v \sin \varphi, \\ V_y = u \sin \varphi + v \cos \varphi. \end{cases} \quad (1.6)$$

Радиусы  $R$  и  $S$  кривизны линий  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, определяются уравнениями

$$dS + R d\varphi = 0 \quad \text{вдоль линии } \alpha,$$

$$dR - S d\varphi = 0 \quad \text{вдоль линии } \beta.$$

### 1.1.2 Соотношения вдоль характеристик в условиях осесимметричной деформации

Дифференциальные уравнения семейств линия скольжения  $\alpha$ ,  $\beta$  в плоскости  $r$ ,  $z$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \operatorname{tg} \varphi \quad \text{вдоль линии } \alpha, \\ \frac{dz}{dr} &= -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{вдоль линии } \beta, \end{aligned}$$

где  $\varphi$  — откладываемый против движения часовой стрелки угол наклона касательной к линии скольжения  $\alpha$  относительно положительного направления оси  $r$ .

Компоненты тензора напряжения в системе координат  $r$ ,  $z$  определяются выражениями

$$\begin{cases} \sigma_r = p + q \cos 2\psi, \\ \sigma_z = p - q \cos 2\psi, \\ \tau_{rz} = q \sin 2\psi, \end{cases} \quad (1.7)$$

где  $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  — нормальное напряжение, отличное от среднего давления  $\sigma$ ;  $q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ;  $\psi$  — угол между первым главным направлением и осью  $r$ .

Для системы дифференциальных уравнений (получаемых из уравнений равновесия) относительно функций  $p$  и  $\varphi$  характеристические соотношения имеют вид [172]

$$\begin{aligned} dp - 2kd\varphi &= \frac{k}{r}(\mp dr + dz) \quad \text{вдоль линии } \alpha, \\ dp + 2kd\varphi &= \frac{k}{r}(\mp dr - dz) \quad \text{вдоль линии } \beta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где знаки при  $dr$  соответствуют определенному состоянию полной пластичности: знак минус соответствует режиму  $\sigma_\varphi = \sigma_2$ , знак плюс — режиму  $\sigma_\varphi = \sigma_1$ .

Компоненты скоростей  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$  вдоль характеристик связаны с компонентами скоростей  $V_r$ ,  $V_z$  вдоль цилиндрических осей соотношениями

$$\begin{cases} V_\alpha = V_r \cos \varphi + V_z \sin \varphi, \\ V_\beta = -V_r \sin \varphi + V_z \cos \varphi; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} V_r = V_\alpha \cos \varphi - V_\beta \sin \varphi, \\ V_z = V_\alpha \sin \varphi + V_\beta \cos \varphi. \end{cases} \quad (1.9)$$

При этом проекции вектора скорости перемещения на криволинейные оси  $\alpha$ ,  $\beta$  определяются уравнениями, [172]:

$$\begin{aligned} dV_\alpha - V_\beta d\varphi &= -\frac{1}{2r}(V_\alpha dr - V_\beta dz) \quad \text{вдоль линии } \alpha, \\ dV_\beta + V_\alpha d\varphi &= -\frac{1}{2r}(V_\beta dr + V_\alpha dz) \quad \text{вдоль линии } \beta. \end{aligned} \quad (1.10)$$

## 1.2 Удельная работа внутренних сил в окрестности особенностей поля скоростей перемещений

Диссипация механической энергии (работа внутренних сил) при пластическом деформировании материалов является одним из основных источников повреждения структуры материала и, как следствие, его разрушения. Необходимость анализа распределение диссипации энергии в окрестности особенностей поля скоростей перемещений (поверхности разрыва, центр веера линий скольжения, угловые точки и т.д.) возникает при изучении процессов деформирования и разрушения материала.

### 1.2.1 Диссипация энергии на линиях разрыва поля скоростей перемещений

В [156, 157, 172] рассматривается величина

$$\overline{W} = \frac{W}{k} = \frac{[V_\tau]}{G + V_\nu}, \quad (1.11)$$

модуль которой имеет физический смысл объёмной плотности энергии диссипации  $W$ , получаемой материальной частицей при пересечении поверхно-

сти разрыва поля скоростей, отнесённой к пределу текучести  $k$ . Здесь  $[V_\tau] = V_\tau^+ - V_\tau^-$  и  $V_\nu$  — разрыв касательной компоненты и нормальная составляющая скорости перемещения частицы на поверхности разрыва,  $G$  — нормальная скорость распространения поверхности разрыва,  $\tau$  и  $\nu$  — единичные векторы касательной и нормали к поверхности разрыва. При этом удовлетворяются геометрические и кинематические условия совместности первого порядка для компонент скорости, [69, 150].

Нормальная  $V_\nu$  и касательная  $V_\tau$  составляющие скорости перемещения частицы на поверхности разрыва определяются из соотношений Гейрингер (1.5) и граничных условий для выбранного поля линий скольжения. Определение нормальной скорости  $G$  зависит от способа задания уравнения движения поверхности разрыва.

Известно, что модуль градиента функции  $f(x, y)$  определяется через производную этой функции по нормали  $\mathbf{n}$  к линии уровня:

$$|\text{grad } f(x, y)| = \frac{df}{dn} \stackrel{(1.2.1)}{=} \frac{dt}{dn},$$

где  $dn$  — элемент нормали к линии  $f(x, y) = \text{const}$ . С другой стороны, производная  $\frac{dn}{dt} = G$ . Следовательно, нормальная скорость распространения линии разрыва определяется соотношением

$$G = \frac{1}{|\text{grad } f(x, y)|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \quad (1.12)$$

В [9] рассмотрены возможные случаи на плоскости (для линии разрыва):

а) Уравнение движения линии разрыва задано в виде

$$f(x, y) = t,$$

где  $t$  — монотонно возрастающая величина, характеризующая положение линии разрыва.

б) Уравнение движения линии разрыва задано в неявном виде:

$$F(x, y, t) = 0.$$

Нормальная скорость распространения линии разрыва определяется по формуле (1.12), где

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

в) Уравнение движения линии разрыва задано в параметрическом виде:

$$f(x, y) = t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + R \cos \xi, \\ y = y_0 + R \sin \xi, \end{cases}$$

где  $\xi$  — некоторый параметр. Определение нормальной скорости распространения линии разрыва также проводится по формуле (1.12), где

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{y=const.} = \frac{\left. \frac{\partial t}{\partial \xi} \right|_{y=const.}}{\frac{\partial x}{\partial \xi}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=const.} = \frac{\left. \frac{\partial t}{\partial \xi} \right|_{x=const.}}{\frac{\partial y}{\partial \xi}}.$$

Данный способ задания движения линии разрыва рассматривается для случая дуги окружности, центр которой совпадает с центром веера линий скольжения (см. главу 2).

### 1.2.2 Диссипация энергии в окрестности центра веера линий скольжения в условиях плоской деформации

Задача об адиабатическом распределении диссипации механической энергии в окрестности особой точки поля линий скольжения в виде центра веера характеристик рассматривается в работе [19].

Согласно [47] удельная мощность диссипации энергии определяется выражением

$$\frac{dW}{dt} = 2k\gamma_{\max}, \quad (1.13)$$

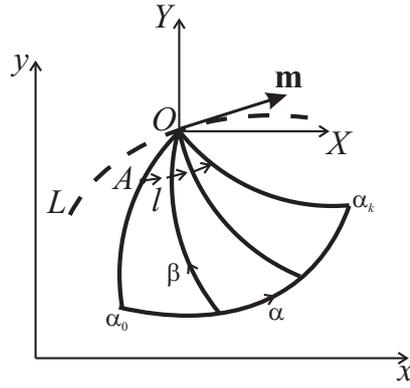


Рисунок 1.1 — Траектория движения частиц в окрестности центра веера линий скольжения

где  $k$  — предел текучести,  $\gamma_{\max} \geq 0$  — максимальная скорость сдвига:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right) - \frac{1}{S} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} - v \right). \quad (1.14)$$

Здесь  $R$ ,  $S$  — радиусы кривизны  $\alpha$ ,  $\beta$  — линий скольжения,  $u$ ,  $v$  — проекции скоростей перемещений на линии  $\alpha$ ,  $\beta$  соответственно. Для определения удельной диссипации энергии, произведённой частицей, уравнение (1.13) должно быть проинтегрировано вдоль траектории движения частицы. На рисунке 1.1 в окрестности центра веера линий скольжения  $\beta$  схематически показана траектория  $l$  движения частицы с начальной точкой  $A$ , лежащей на границе веера при  $\varphi = \varphi_0 = \alpha_0$ . Компоненты скоростей  $u$ ,  $v$  отнесены, соответственно, к линиям  $\alpha$  и  $\beta$ .

Пусть центр веера  $O$  движется со скоростью  $\mathbf{m}$ , а скорость перемещения частиц  $\mathbf{V}$  определяется в некоторой неподвижной системе координат компонентами  $u$  и  $v$ . Введём подвижную систему координат  $XOY$ , в которой поле скоростей перемещений определяется разностью  $(\mathbf{V} - \mathbf{m})$  с компонентами  $u^*$  и  $v^*$ , [26]. Пусть в момент времени  $t_0$  частица занимает положение точки  $A$ . В интервале времени  $[t_0, t_k]$  частица будет пересекать веер и в ней будет

накапливаться удельная диссипация энергии. Из (1.13) следует

$$\frac{W}{2k} = \int_{t_0}^{t_k} \gamma_{max} dt. \quad (1.15)$$

Вдоль траектории  $l$  изменяются расстояние от частицы до центра веера  $R$  и угловое расстояние от начального луча  $\varphi_0$ , которым соответствуют элементы длин дуг  $dS$  и  $dR$ , рисунок 1.2:

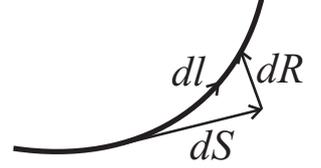


Рисунок 1.2 — Элемент траектории движения частицы

$$dl = \sqrt{(dR)^2 + (dS)^2},$$

$$dR = v^* dt, \quad dS = u^* dt = R d\varphi,$$

откуда

$$dt = \frac{R d\varphi}{u^*}, \quad dt = \frac{dR}{v^*}. \quad (1.16)$$

Согласно (1.14)–(1.16) после замены переменной интегрирования  $t$  на  $\varphi$ , получим

$$\frac{W}{2k} = \int_{t_0}^{t_k} \gamma_{max} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} + u^* \right) \frac{d\varphi}{u^*} - \int_{R_0}^{R_k} \frac{1}{S} \left( \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} - v^* \right) \frac{dR}{v^*}, \quad (1.17)$$

где  $\varphi = \alpha + \beta$ ,  $d\varphi = d\alpha$  при  $\beta = const$ .

Если  $\beta$ -линии — прямые ( $S \rightarrow \infty$ ), то второй интеграл равен нулю и для любой траектории накопление диссипации определяется первым слагаемым. Если начальное положение частицы, определяемое точкой  $A$ , стремится к точке  $O$  ( $A \rightarrow O$ ), то второй интеграл также будет стремиться к нулю, и предельные значения  $W$  будут определяться выражением

$$\frac{W}{2k} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} + u^* \right) \frac{d\varphi}{u^*}. \quad (1.18)$$

Заметим, что предельные деформации частицы в веере будут происходить только при  $V \geq 0$ , и значение  $\varphi_k$  будет определяться из условия  $V = 0$ .

### 1.2.3 Диссипация энергии в окрестности центра веера линий скольжения в условиях осесимметричной деформации

Подход к определению удельной диссипации в окрестности фронта трещины при в условиях осесимметричной деформации предложен в работе [14].

Согласно [47] удельная мощность диссипации энергии в объёме материала определяется выражением

$$W = \int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV,$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — тензоры напряжения и скорости деформации, которые при осесимметричном напряженном состоянии имеют вид (1.7):

$$\sigma_r = p - k \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = p + k \sin 2\varphi, \quad \tau_{rz} = k \cos 2\varphi,$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{V_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad \eta_{rz} = \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right),$$

где компоненты скорости перемещений  $V_r$ ,  $V_z$  вдоль цилиндрических осей  $r$ ,  $z$  определяются через компоненты  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$  согласно (1.9) выражениями

$$V_r = V_\alpha \cos \varphi - V_\beta \sin \varphi, \quad V_z = V_\alpha \sin \varphi + V_\beta \cos \varphi.$$

Запишем соотношения (1.8) в виде

$$\begin{cases} dp - 2kd\varphi = \frac{k}{r} (\mp \cos \varphi + \sin \varphi) dS_\alpha & \text{вдоль } \alpha, \\ dp + 2kd\varphi = \frac{k}{r} (\pm \sin \varphi - \cos \varphi) dS_\beta & \text{вдоль } \beta, \end{cases}$$

где  $dS_\alpha = R d\varphi$ ,  $dS_\beta = -S d\varphi$  — элементы дуг линий скольжения  $\alpha$ ,  $\beta$ ;  $R$ ,  $S$  — радиусы кривизны этих линий, соответственно. Интегрирование последних

уравнений позволяет определить нормальное напряжение:

$$\begin{cases} p = k \left( 2\varphi \mp \frac{R}{r} \sin \varphi - \frac{R}{r} \cos \varphi \right) + C_\alpha & \text{вдоль } \alpha, \\ p = k \left( 2\varphi \mp \frac{S}{r} \cos \varphi - \frac{S}{r} \sin \varphi \right) + C_\beta & \text{вдоль } \beta. \end{cases}$$

Интегрирование соотношений (1.10), записанных в виде

$$\begin{cases} dV_\alpha - V_\beta d\varphi + V_r \frac{dS_\alpha}{2r} = 0 & \text{вдоль } \alpha, \\ dV_\beta + V_\alpha d\varphi + V_r \frac{dS_\beta}{2r} = 0 & \text{вдоль } \beta, \end{cases}$$

позволяет определить компоненты скоростей перемещений вдоль линий скольжения  $\alpha, \beta$ :

$$\begin{cases} V_\alpha(\varphi) = \exp\left(-\frac{R}{2r} \sin \varphi\right) \left[ \int V_\beta(\varphi) \left(1 + \frac{R}{2r} \sin \varphi\right) \exp\left(\frac{R}{2r} \sin \varphi\right) d\varphi + C_\alpha \right], \\ V_\beta(\varphi) = -\exp\left(\frac{S}{2r} \cos \varphi\right) \left[ \int V_\alpha(\varphi) \left(1 - \frac{S}{2r} \cos \varphi\right) \exp\left(-\frac{S}{2r} \cos \varphi\right) d\varphi + C_\beta \right]. \end{cases}$$

### 1.3 Поля деформаций при одноосном деформировании плоских и цилиндрических образцов

В качестве основной величины, характеризующей распределение деформаций в пластических областях и на особенностях поля скоростей перемещений, в работе выбран тензор конечных деформаций Альманси  $\mathbf{E} = [E_{ij}]$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T) \quad \text{или} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0), \quad (1.19)$$

где  $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]$  — единичный тензор,  $\delta_{ij}$  — дельта Кронекера;  $x_i^0, x_i$  — лагранжевы и эйлеровы координаты частицы;  $\mathbf{A} = [A_{ij}] = [x_{i,j}^0]^T = [x_{j,i}^0]$  — тензор дисторсии, [57]. Вообще, в качестве меры деформаций может быть выбран любой

тензор конечных деформаций, поскольку каждый из них может быть выражен через тензор дисторсии, [57]. Изменения с течением времени компонент тензоров Альманси и дисторсии определяются уравнениями [57, 156, 172]

$$\frac{D\mathbf{E}}{Dt} \equiv \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \mathbf{E}\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{E} = \varepsilon, \quad \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \equiv \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{U}^T\mathbf{A} = 0,$$

где  $\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$  — тензор скорости деформации,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  — производная по времени, взятая вдоль траектории фиксированной материальной частицы среды,  $\mathbf{U} = [V_{i,k}]$  — матрица частных производных от компонент скорости  $V_i$  по эйлеровым координатам  $x_k$ . В компонентах рассматриваемых тензоров последние уравнения имеют следующий вид

$$\frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} E_{kj} = \varepsilon_{ij}, \quad (1.20)$$

$$\frac{dA_{ij}}{dt} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} A_{kj} = 0, \quad (1.21)$$

где  $i, j = \overline{1, 3}$ . Системы (1.20), (1.21) позволяют получить аналитическое распределение деформаций в пластической области при движении частицы в непрерывном поле скоростей перемещений  $V_i$  и в окрестности центра веера характеристик. Особенности применения этих систем при одноосном растяжении плоского и цилиндрического образцов рассматриваются ниже.

В случае, когда поле скоростей перемещений имеет в пластической области особенность в виде поверхности (линии) разрыва, компоненты тензоров Альманси и дисторсии определяются через удельную работу внутренних сил  $W$  (п. 1.2.1), рассеиваемую частицей при пересечении соответствующей особенности.

### 1.3.1 Накопление деформаций в однородном поле тензора скорости деформации в условиях плоской деформации

В условиях плоской деформации система (1.20) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{xx}}{\partial x} V_x + \frac{\partial E_{xx}}{\partial y} V_y + 2E_{xx} \frac{\partial V_x}{\partial x} + 2E_{xy} \frac{\partial V_y}{\partial x} &= \frac{\partial V_x}{\partial x}, \\
\frac{\partial E_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial x} V_x + \frac{\partial E_{yy}}{\partial y} V_y + 2E_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} + 2E_{yy} \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \frac{\partial V_y}{\partial y}, \\
\frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial E_{xy}}{\partial x} V_x + \frac{\partial E_{xy}}{\partial y} V_y + 2E_{xx} \frac{\partial V_x}{\partial y} + E_{xy} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \\
+ 2E_{yy} \frac{\partial V_y}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

В работе [156] показано, что при подстановке в систему (1.22) компонент тензоров Альманси  $\mathbf{E}$  и скорости деформации  $\varepsilon$  в виде, [146]

$$\begin{aligned}
E_{xx} &= e + g \cos 2\theta, & E_{yy} &= e - g \cos 2\theta, & E_{xy} &= g \sin 2\theta, \\
\varepsilon_{xx} &= \gamma \cos 2\psi, & \varepsilon_{yy} &= -\gamma \cos 2\psi, & \varepsilon_{xy} &= \gamma \sin 2\psi,
\end{aligned}$$

где  $e = \frac{1}{2}(E_{xx} + E_{yy})$ ,  $g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{xx} - E_{yy})^2 + 4E_{xy}^2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$ ,  $\theta, \psi$  — соответственно углы наклонов первых главных направлений тензоров  $\mathbf{E}$ ,  $\varepsilon$  к оси  $x$ ;

система (1.22) принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} + 2g\gamma \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\
\frac{dg}{dt} + 2e\gamma \cos 2(\theta - \psi) &= \gamma \cos 2(\theta - \psi), \\
2g \frac{d\theta}{dt} - 2e\gamma \sin 2(\theta - \psi) + g \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) &= -\gamma \sin 2(\theta - \psi),
\end{aligned} \tag{1.23}$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y}$  — материальная производная по времени. Решение системы (1.23) позволяет получить аналитически распределение деформаций вдоль траектории движения частицы в пластической области с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации.

В частности, при одноосном однородном растяжении полосы, когда углы  $\theta$  и  $\psi$  не изменяются и  $\theta = \psi = \frac{\pi}{2}$ , система (1.23) преобразуется к виду, [172]

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} + 2g\gamma &= 0, \\ \frac{dg}{dt} + 2\gamma \left( e - \frac{1}{2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

(третье уравнение в (1.23) обращается в тождество). В работе [172] для непрерывного поля скоростей перемещений (рисунок 1.3)

$$V_x(x, y) = -\frac{V}{l}x, \quad V_y(x, y) = \frac{V}{l}y,$$

определены компоненты тензора скорости деформации:

$$\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy} = -\frac{V}{l}, \quad \varepsilon_{xy} = 0,$$

откуда

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} = \frac{V}{l} \stackrel{l=l_0+Vt}{=} \frac{V}{l_0 + Vt}. \quad (1.25)$$

Система (1.24) имеет единственное решение

$$e = -\frac{\delta^2(2 + \delta)^2}{4(1 + \delta)^2}, \quad g = \frac{\delta(2 + \delta)[(1 + \delta)^2 + 1]}{4(1 + \delta)^2},$$

где  $\delta = \frac{Vt}{l_0}$  — относительное удлинение образца при растяжении. Тогда согласно (1.30) главные значения тензора Альманси при одноосном однородном растяжении плоского образца определяются выражениями

$$E_1 = \frac{\delta(2 + \delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad E_2 = -\frac{\delta(2 + \delta)}{2}. \quad (1.26)$$

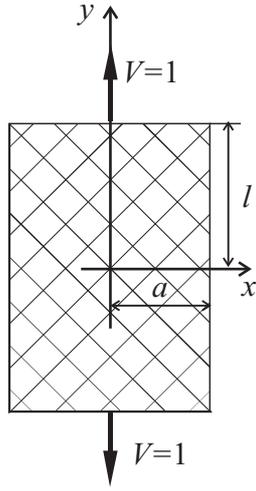


Рисунок 1.3 — Схема одноосного растяжения полосы с непрерывным полем скоростей перемещений

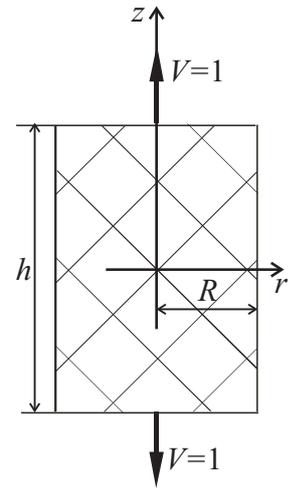


Рисунок 1.4 — Схема одноосного растяжения цилиндра с непрерывным полем скоростей перемещений

### 1.3.2 Накопление деформаций в однородном поле тензора скорости деформации в условиях осесимметричной деформации

В условиях осесимметричной деформации система (1.20) для течения в плоскости  $\varphi = 0$  принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_{rr}}{dt} + 2 \left( E_{rr} \frac{\partial V_r}{\partial r} + E_{rz} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) &= \frac{\partial V_r}{\partial r}, \\
 \frac{d(r^2 E_{\varphi\varphi})}{dt} &= \frac{V_r}{r}, \\
 \frac{dE_{zz}}{dt} + 2 \left( E_{rz} \frac{\partial V_r}{\partial z} + E_{zz} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial V_z}{\partial z}, \\
 \frac{dE_{rz}}{dt} + E_{rr} \frac{\partial V_r}{\partial z} + E_{rz} \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + E_{zz} \frac{\partial V_z}{\partial r} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right).
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

В работе [172] показано, что при подстановке в систему (1.27) компонент тензоров Альманси  $\mathbf{E}$  и скорости деформации  $\varepsilon$  в виде, [146]

$$\begin{aligned}
 E_{rr} &= e + g \cos 2\theta, & E_{zz} &= e - g \cos 2\theta, & E_{rz} &= g \sin 2\theta, \\
 \varepsilon_{rr} &= \varepsilon + \gamma \cos 2\psi, & \varepsilon_{zz} &= \varepsilon - \gamma \cos 2\psi, & \varepsilon_{rz} &= \gamma \sin 2\psi,
 \end{aligned}$$

где  $e = \frac{1}{2}(E_{rr} + E_{zz})$ ,  $g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{rr} - E_{zz})^2 + 4E_{rz}^2}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})$ ,  
 $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{zz})^2 + 4\varepsilon_{rz}^2}$ ,  $\theta, \psi$  — углы наклонов первых главных направле-  
 ний тензоров  $\mathbf{E}$ ,  $\varepsilon$  к осям  $r, z$ , соответственно;

система (1.27) с учётом условия несжимаемости (1.1) в условиях осесиммет-  
 ричной деформации

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0,$$

принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} + 2g\gamma \cos 2(\theta - \psi) &= \frac{V_r}{r} \left( e - \frac{1}{2} \right), \\ \frac{dg}{dt} + 2\gamma \left( e - \frac{1}{2} \right) \cos 2(\theta - \psi) &= g \frac{V_r}{r}, \\ \frac{d(r^2 E_{\varphi\varphi})}{dt} &= \frac{V_r}{r}, \\ 2g \frac{d\theta}{dt} - \gamma \left( e - \frac{1}{2} \right) \sin 2(\theta - \psi) &= 0. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Решение системы (1.28) определяет распределение деформаций вдоль тра-  
 ектории движения частицы в пластической области с непрерывным полем  
 скоростей перемещений в условиях осесимметричной деформации.

В [172] для непрерывного однородного поля скоростей перемещений (ри-  
 сунки 1.4)

$$V_r(r, z) = -\frac{Vr}{h} \frac{r}{2}, \quad V_z(r, z) = \frac{V}{h} z,$$

определены компоненты тензора скоростей деформации:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{V}{2h}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{V}{h}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\varphi z} = 0,$$

откуда

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{zz})^2 + 4\varepsilon_{rz}^2} = \frac{3V}{4h} \stackrel{h=h_0+Vt}{=} \frac{3V}{4(h_0 + Vt)}.$$

Система (1.28) имеет единственное решение

$$e = -\frac{\delta(\delta^2 + \delta - 1)}{4(1 + \delta)^2}, \quad g = \frac{\delta(\delta^2 + 3\delta + 3)}{4(1 + \delta)^2},$$

где  $\delta = \frac{Vt}{h_0}$  — относительное удлинение цилиндрического образца при растяжении. Тогда согласно (1.30) главные значения тензора Альманси при одноосном однородном растяжении цилиндрического образца определяются выражениями

$$E_1 = \frac{\delta(2 + \delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad E_2 = E_3 = -\frac{1}{2}\delta. \quad (1.29)$$

### 1.3.3 Поля деформаций на линиях разрыва поля скоростей перемещений в условиях плоской деформации

Известно [146], что в условиях плоской деформации главные значений тензора Альманси определяются через компоненты соотношениями

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}, \\ E_2 &= \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Распределение деформаций на линиях разрыва поля скоростей перемещений определяется состоянием частицы: до пересечения линии разрыва частица была недеформирована или деформирована, и частица дважды пересекает линию разрыва. Ниже приводятся соотношения для определения компонент тензоров Альманси и дисторсии для каждого случая [32, 156].

а) *До пересечения линии разрыва  $L_1$  поля скоростей перемещения частица не деформировалась.* Тензоры дисторсии и Альманси равны, соответственно, единичному и нулевому тензору:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} \stackrel{(1.19)}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}^T) = \mathbf{O}. \quad (1.31)$$

При пересечении линии  $L_1$  компоненты градиента деформаций преобразуются по закону

$$x_{i,j}^0 = \delta_{ij} + W\tau_i\nu_j \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{1,1}^0 = \delta_{11} + W\tau_1\nu_1 = 1, \\ x_{1,2}^0 = \delta_{12} + W\tau_1\nu_2 = W, \\ x_{2,1}^0 = \delta_{21} + W\tau_2\nu_1 = 0, \\ x_{2,2}^0 = \delta_{22} + W\tau_2\nu_2 = 1, \end{cases}$$

где  $W$  — удельная работа внутренних сил, определяемая согласно (1.11) на линии  $L_1$ ;  $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (1, 0)$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (0, 1)$  — единичные векторы касательной и нормали к линии разрыва  $L_1$ . Следовательно, тензоры дисторсии и Альманси после пересечения частицей линии  $L_1$  принимают вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & W \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -W \\ -W & -W^2 \end{bmatrix}.$$

Согласно (1.30) главные значения тензора Альманси при переходе через линию разрыва  $L_1$  определяются через удельную работу внутренних сил  $W$  выражениями

$$E_1 = \frac{W^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{W^2}} - 1 \right), \quad E_2 = -\frac{W^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{W^2}} + 1 \right). \quad (1.33)$$

б) *До пересечения линии разрыва  $L_2$  поля скоростей перемещения частица деформировалась.* В этом случае компоненты градиента деформаций при пересечении линии  $L_2$  преобразуются по закону

$$x_{i,j}^{0+} = (\delta_{ik} + W\tau_i\nu_k) x_{k,j}^{0-}$$

или

$$\begin{cases} x_{1,1}^{0+} = (\delta_{11} + W\tau_1\nu_1) x_{1,1}^{0-} + (\delta_{12} + W\tau_1\nu_2) x_{2,1}^{0-} = x_{1,1}^{0-} + Wx_{2,1}^{0-}, \\ x_{1,2}^{0+} = (\delta_{11} + W\tau_1\nu_1) x_{1,2}^{0-} + (\delta_{12} + W\tau_1\nu_2) x_{2,2}^{0-} = x_{1,2}^{0-} + Wx_{2,2}^{0-}, \\ x_{2,1}^{0+} = (\delta_{21} + W\tau_2\nu_1) x_{1,1}^{0-} + (\delta_{22} + W\tau_2\nu_2) x_{2,1}^{0-} = x_{2,1}^{0-}, \\ x_{2,2}^{0+} = (\delta_{21} + W\tau_2\nu_1) x_{1,2}^{0-} + (\delta_{22} + W\tau_2\nu_2) x_{2,2}^{0-} = x_{2,2}^{0-}, \end{cases}$$

где  $W$  — удельная работа внутренних сил, определяемая согласно (1.11) на линии  $L_2$ ;  $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (1, 0)$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (0, 1)$  — единичные векторы касательной и нормали к линии разрыва  $L_2$ ; знаками «−», «+» обозначены значения компонент градиента деформаций до и после линии разрыва, соответственно. Тензор дисторсии будет определяться в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \begin{bmatrix} x_{1,1}^{0+} & x_{2,1}^{0+} \\ x_{1,2}^{0+} & x_{2,2}^{0+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1}^{0-} & x_{2,1}^{0-} \\ x_{1,2}^{0-} & x_{2,2}^{0-} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{A}^- \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1}^{0-} + Wx_{2,1}^{0-} & x_{2,1}^{0-} \\ x_{1,2}^{0-} + Wx_{2,2}^{0-} & x_{2,2}^{0-} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Компоненты тензора Альманси и его главные значения определяются согласно (1.34) по формулам (1.19), (1.30).

в) *Частица дважды пересекает линию разрыва поля скоростей перемещений*: первоначально недеформированная частица пересекает линию разрыва  $L_1$ , и далее (деформировавшись) пересекает линию  $L_2$ . При этом будем считать, что значение удельной работы внутренних сил на линиях  $L_1$  и  $L_2$  одинаково и равно  $W$ . Тогда при пересечении линии  $L_1$  компоненты тензоров дисторсии и Альманси, а также главные значения тензора Альманси определяются по формулам (1.32), (1.33). Далее при пересечении линии  $L_2$

компоненты тензора дисторсии преобразуются согласно (1.34):

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2W & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Компоненты тензора Альманси согласно (1.19) и (1.35) определяются в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2W & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2W \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -W \\ -W & -2W^2 \end{bmatrix}; \quad (1.36)$$

а главные значения согласно (1.30) получим в виде

$$E_1 = W^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{W^2}} - 1 \right), \quad E_2 = -W^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{W^2}} + 1 \right). \quad (1.37)$$

г) *Преобразование компонент тензоров деформаций при переходе от одной системы координат к другой.* Пусть известны компоненты тензоров  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{E}$  в локальной системе координат  $(\tau, \nu)$ , связанной с линией разрыва  $L_1$ . Для того, чтобы определить компоненты этих тензоров в системе координат  $(\tau', \nu')$ , связанной с линией  $L_2$ , полученной в результате поворота системы  $(\tau, \nu)$  на угол  $\mu$  (рисунок 1.5), необходимо построить тензор преобразования, компонентами которого являются направляющие косинусы углов между соответствующими осями, [105]:

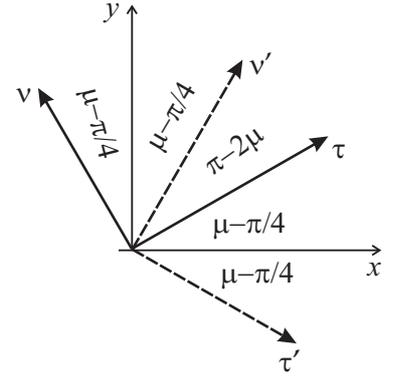


Рисунок 1.5 — Локальные системы координат  $(\tau, \nu)$ ,  $(\tau', \nu')$ , связанные с линиями разрыва  $L_1, L_2$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos(\tau, \tau') & \cos(\nu, \tau') \\ \cos(\tau, \nu') & \cos(\nu, \nu') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2\mu & \cos 2\mu \\ -\cos 2\mu & \sin 2\mu \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Тогда компоненты тензоров дисторсии и Альманси в локальной системе  $(\tau', \nu')$  определяются выражениями:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}^T. \quad (1.39)$$

### 1.3.4 Поля деформаций в окрестности центра веера линий скольжения в условиях плоской деформации

Для определения полей деформаций в окрестности центра веера линий скольжения при плоской деформации система дифференциальных уравнений в частных производных (1.20) в результате определённых математических преобразований сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений одного из следующих видов, определяемых геометрическим характером поля линий скольжения [156]:

– в центре веера линий скольжения сходятся линии семейства  $\beta$  ( $R \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\alpha} f + g \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ \frac{dg}{d\alpha} f + \left(e - \frac{1}{2}\right) \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ 2g \frac{d\theta}{d\alpha} f - \left(e - \frac{1}{2}\right) \sin 2(\theta - \psi) - g &= 0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где  $f = \frac{u - (a' \cos \alpha + b' \sin \alpha)}{\left(u + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)}$ ;  $u, v$  – проекции скорости перемещения на криволинейные оси  $\alpha, \beta$ ;  $a', b'$  – компоненты скорости движения центра веера;

– в центре веера линий скольжения сходятся линии семейства  $\alpha$  ( $S \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\beta} \bar{f} + g \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ \frac{dg}{d\beta} \bar{f} + \left(e - \frac{1}{2}\right) \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ 2g \frac{d\theta}{d\beta} \bar{f} - \left(e - \frac{1}{2}\right) \sin 2(\theta - \psi) + g &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \bar{f} = \frac{-v - (a' \sin \beta - b' \cos \beta)}{\left(v - \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)}.$$

При решении некоторых задач для определения полей деформаций в окрестности центра веера линий скольжения удобнее использовать систему дифференциальных уравнений в компонентах дисторсии. В [9, 26] также в результате определённых математических преобразований система дифференциальных уравнений в частных производных для компонент дисторсии (1.21) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

– в центре веера линий скольжения сходятся линии семейства  $\beta$  ( $R \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{dA_{11}}{d\alpha} f - A_{11} \sin \alpha \cos \alpha + A_{21} \cos^2 \alpha &= 0, \\ \frac{dA_{12}}{d\alpha} f - A_{12} \sin \alpha \cos \alpha + A_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ \frac{dA_{21}}{d\alpha} f - A_{11} \sin^2 \alpha + A_{21} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \frac{dA_{22}}{d\alpha} f - A_{12} \sin^2 \alpha + A_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\text{где } f = \frac{u - (a' \cos \alpha + b' \sin \alpha)}{\left(u + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)};$$

– в центре веера линий скольжения сходятся линии семейства  $\alpha$  ( $S \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{dA_{11}}{d\beta} f - A_{11} \sin \beta \cos \beta - A_{21} \sin^2 \beta &= 0, \\ \frac{dA_{12}}{d\beta} f - A_{12} \sin \beta \cos \beta - A_{22} \sin^2 \beta &= 0, \\ \frac{dA_{21}}{d\beta} f + A_{11} \cos^2 \beta + A_{21} \sin \beta \cos \beta &= 0, \\ \frac{dA_{22}}{d\beta} f + A_{12} \cos^2 \beta + A_{22} \sin \beta \cos \beta &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \bar{f} = \frac{-v - (a' \sin \beta - b' \cos \beta)}{\left(v - \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)}.$$

Отметим, что последние две системы разделяются на две системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно компонент тензора

дисторсии  $(A_{11}, A_{21})$  и  $(A_{12}, A_{22})$ . Решение приведённых в данном разделе систем дифференциальных уравнений может быть реализовано численно.

Для определения главных значений тензора конечных деформаций Альманси  $\mathbf{E}$  используются соотношения (1.19), (1.30):

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (\delta_{ij} - A_{i,k} A_{j,k}), \\ e &= \frac{1}{2} (E_{11} + E_{22}), \quad g = \frac{1}{2} \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}, \\ E_1 &= e + g, \quad E_2 = e - g, \\ \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2E_{12}}{E_{11} - E_{22}}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

## 1.4 Критерии выбора предпочтительного пластического течения в условиях плоской деформации

Известно, что в рамках теории идеального жёсткопластического тела поля скоростей перемещений и деформаций не являются единственными, [47, 79, 146, 155]. Очевидно, что при рассмотрении задач теории плоской деформации кинематически возможно построение нескольких решений с учётом изменения геометрии. При этом поля скоростей должны удовлетворять граничным условиям на жёсткопластических границах. Неединственность поля скоростей ведёт к различным распределениям поля деформаций для различных кинематически возможных решений.

Известно [156, 161, 172], что в условиях плоской деформации вследствие несжимаемости идеального жёсткопластического тела только одно из главных значений тензора конечных деформаций Альманси является независимым. В работе в качестве характеристики величины деформации частицы принимается алгебраически наибольшее первое главное значение  $E_1$ , являющееся, в частности, монотонной функцией удельной работы внутренних сил  $W$  на линии разрыва поля скоростей перемещений, (см. раздел 1.3.3).

На основании сказанного предлагается использование следующих критериев выбора предпочтительного решения и его развития, [161, 172]:

I. *Пластическое течение развивается таким образом, что максимальное значение деформаций в пластической области минимально:*

$$\inf_{d\Omega} \sup_{\Omega} E_1, \quad (1.43)$$

где  $E_1$  — первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси;  $\Omega$  — возможные пластические области;  $d\Omega$  — возможные изменения пластической области при определённом пластическом течении, характеризуемые движением особенностей пластической области в данный момент времени.

II. *Пластическое течение развивается таким образом, что максимальное значение удельной работы внутренних сил в пластической области минимально:*

$$\inf_{d\Omega} \sup_{\Omega} W. \quad (1.44)$$

В рамках предлагаемых критериев пластическое течение является практически единственным, что позволяет однозначно определять поля деформаций и диссипацию энергии.

## 1.5 Выводы к первой главе

Представлены используемые в работе основные положения теории пластического течения в рамках теории жёсткопластического тела; приведены основные соотношения, выполняющиеся вдоль характеристических линий, в условиях плоской и осесимметричной деформаций, позволяющие проводить расчёт полей напряжения и скорости деформаций с учётом изменения геометрии тел при конечных деформациях и движении особенностей поля скоростей перемещений.

Получены соотношения для определения аналитического распределения удельной работы внутренних сил (диссипации энергии) и деформаций в пластической области и в окрестности особенностей поля линий скольжения (на линиях разрыва поля скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения) в условиях плоской и осесимметричной деформации. В качестве основной величины, характеризующей распределение деформаций, выбран тензор конечных деформаций Альманси.

Представлены критерии выбора предпочтительного пластического течения в случае неединственности поля скоростей перемещений и, как следствие, распределения деформаций в пластической области. В основу критериев заложены значения деформаций и диссипации энергии.

## Глава 2

# Задачи, моделирующие процессы деформирования и разрушения

Моделирование поведения конструкций в различных технологических процессах при наличии больших пластических деформаций с учётом изменения геометрии деформируемых тел является одной из важных задач механики деформируемого твёрдого тела. Известно, что развитие теории пластичности связано с решениями таких технологических задач, как обработка материалов давлением, резание, внедрение штампов различной формы, волочение, прокатка и прессование [63–65, 73, 79, 84, 85, 146, и др.]. Решению задач в рамках теории пластического течения с учётом изменения геометрии формы тела посвящены, в частности, работы Г. И. Быковцева, Д. Д. Ивлева, А. И. Хромова [47, 48, 69, 70, 156–159, и др.] в рамках модели жёсткопластического тела, позволяющей аналитически описывать поля деформаций и диссипации энергии в окрестности особенностей поля скоростей перемещений.

В данной главе рассматривается подход к определению и анализу полей деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения для задач теории идеального жёсткопластического тела в условиях плоской деформации: внедрение клина в жёсткопластическую полуплоскость, раздавливание острого и усечённого клиньев гладким плоским штампом, растяжение полосы с  $V$ -образными вырезами. Предлагаемые в решении схемы пластических течений позволяют моделировать процессы деформирования и разрушения материала при описании более сложных технологических процессов, таких как выглаживание, прокатка, резание и др., а так же используются в данной работе при описании процессов зарождения и распространения трещин в

упругопластическом материале (см. гл. 4, 5). Возможность учёта изменения геометрии свободных поверхностей и аналитического анализа полей деформаций определяет актуальность подобных модельных задач.

Основы рассматриваемого в главе подхода к анализу полей деформаций в предлагаемых задачах опубликованы в работах [9, 35, 36, 170, 171] а также использованы при решении задач о течении жёсткопластического материала по каналу постоянной высоты с круговым изгибом и угловой точкой, прямом и обратном прессовании материала через прямоугольную матрицу [26, 97, 164], возможном затуплении выреза при одноосном растяжении [123, 167, 191].

Необходимость рассмотрения указанных задача возникает, в первую очередь, в связи с исследованием поведения материала в окрестности особенностей поля линий скольжения, и в частности зон пластической области, «опасных» для разрушения.

## 2.1 Внедрение клина в жёсткопластическую полуплоскость

Пластическое течение в задаче о внедрении клина в жёсткопластическую полуплоскость в рамках плоской деформации (рисунок 2.1) обладает симметрией и геометрическим подобием относительно глубины внедрения клина; при этом свободная поверхность остаётся прямолинейной; объём вытесняемого материала (удвоенная площадь треугольника  $AFС$ ) равен объёму внедрённой части клина (удвоенная площадь треугольника  $ОBF$ ) [79, 155]. В виду симметрии далее рассматривается только правая часть пластической области, которая состоит из двух прямоугольных треугольников  $ABD$  и  $ACE$  с равномерным напряжённым состоянием, соединённых центрированным веером  $ADE$ . Траектория движения частиц в пластической области зависит от

места пересечения жёсткопластической границы, и подробно рассматривается в работах [79, 155].

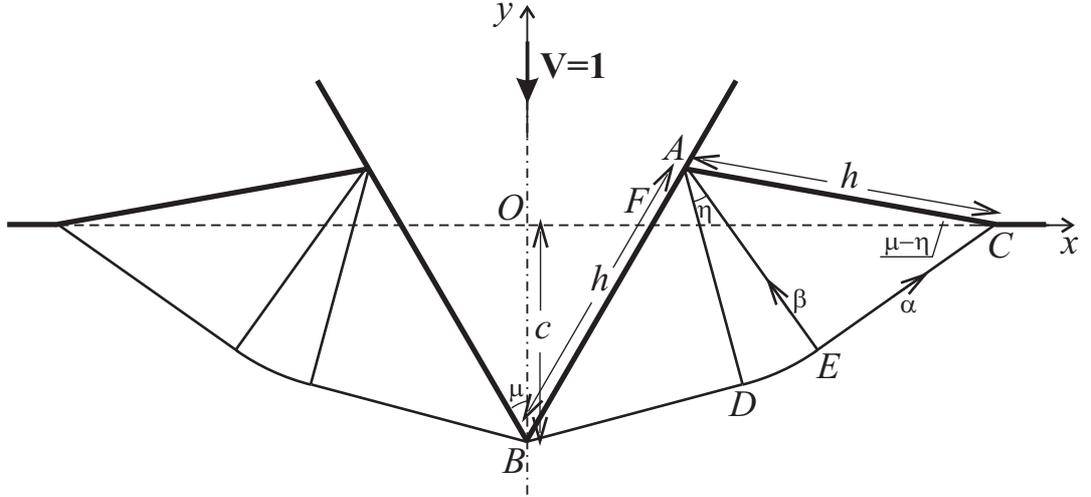


Рисунок 2.1 — Пластическое течение при внедрении клина в жёсткопластическую полуплоскость

Равенство площадей треугольников  $OBF$  и  $AFC$  и условие, что точка  $C$  всегда остаётся на первоначальной поверхности, дают соотношения для определения величин, характеризующих геометрию пластической области:

$$\frac{h}{c} = \frac{1}{\cos \mu - \sin(\mu - \eta)}, \quad \cos(2\mu - \eta) = \frac{\cos \eta}{1 + \sin \eta},$$

где  $\mu, \eta$  — углы, характеризующие растворы клина и централизованного веера, соответственно;  $h = AC = AB$  — ширина свободной поверхности;  $c = OB$  — глубина внедрения клина. В выбранной системе координат положения характерных точек  $B, A, C$  пластической области определены соответствующими координатами:

$$\begin{aligned} x_B &= 0, & y_B &= -t; \\ x_A &= h \sin \mu, & y_A &= h \sin(\mu - \eta); \\ x_C &= h (\sin \mu + \cos(\mu - \eta)), & y_C &= 0. \end{aligned}$$

При этом уравнения составляющих линии разрыва поля скоростей перемещений  $BDEC$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 BD : \quad & - \left[ y - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \mu \right) x \right] = t; \\
 DE : \quad & \begin{cases} x = x_A + R \cos \xi, \\ y = y_A + R \sin \xi; \end{cases} \\
 EC : \quad & y = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \mu + \eta \right) [x - h (\sin \mu + \cos(\mu - \eta))];
 \end{aligned}$$

где  $R = \frac{h}{\sqrt{2}}$ ,  $\xi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha$  — угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $x$ .

Учитывая, что нормальная составляющая и разрыв касательной составляющей скорости движения частиц на линии разрыва поля скоростей перемещений  $BDEC$  равны

$$V_\nu = 0, \quad [V_\tau] = \sqrt{2} \sin \mu,$$

удельная диссипация энергии  $W$  на этой линии согласно (1.11) определяется выражением

$$W = \frac{\sqrt{2} \sin \mu}{G},$$

где нормальная скорость  $G$  распространения линии  $BDEC$  согласно (1.12) равна

$$G_{BD} = \cos \left( \frac{\pi}{4} - \mu \right),$$

$$G_{DE} = a' \cos \xi + b' \sin \xi + R', \quad \xi = \left[ -\frac{\pi}{4} - \mu, -\frac{\pi}{4} - \mu + \eta \right],$$

$$G_{EC} = \frac{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \mu + \eta \right) [\sin \mu + \cos(\mu - \eta)]}{\cos \mu - \sin(\mu - \eta)},$$

где

$$a' = \frac{dx_A}{dt} = \frac{\sin \mu}{\cos \mu - \sin(\mu - \eta)}, \quad b' = \frac{dy_A}{dt} = \frac{\sin(\mu - \eta)}{\cos \mu - \sin(\mu - \eta)},$$

$$R' = \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2 [\cos \mu - \sin(\mu - \eta)]},$$

$a'$ ,  $b'$  — компоненты скорости движения центра веера (точка  $A$ ).

Очевидно, что автомодельность решения приводит к постоянным значениям удельной диссипации энергии  $W$ , и соответственно, деформаций на прямолинейных участках линии разрыва  $BDEC$ .

Анализ поля деформаций (на основе первого главного значения тензора Альманси, см. п. 1.3) в пластической области, распределение которого получено согласно (1.32), (1.34) и (1.40), показывает, что до значения  $\mu^* \approx 31,7^\circ$  наибольшие деформации наблюдаются в окрестности центра веера линий

скольжения, при  $\mu > 31,7^\circ$  наибольшие деформации на линии разрыва  $BDEC$ , рисунок 2.2. При этом учитывается, что в веер попадает частица, первоначально деформированная на участке  $EC$  линии разрыва.

Рассмотренное пластическое течение взято за основу в решении задачи о выглаживании жёсткопластической полуплоскости острым клином (см. раздел 4.3).

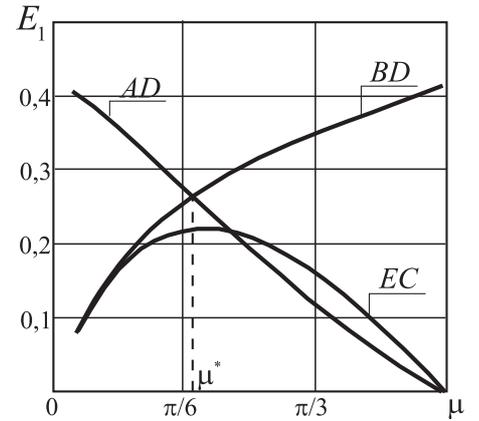


Рисунок 2.2 — Распределение деформаций ( $E_1$ ) в пластической области в задаче о внедрении клина в полуплоскость

## 2.2 Раздавливание клина

Задачи о раздавливании острого и усечённого клиньев гладким плоским штампом представляют собой задачи, решение которых с точки зрения построения поля скоростей перемещений неединственно. Ниже рассмотрены известные пластические течения в задаче о раздавливании острого клина [155], которые распространены на решения задачи о раздавливании усечённого клина [156], и несимметричное пластическое течение [9, 36]. Как и в предыдущей задаче о внедрении клина в полуплоскость для каждого решения приводятся координаты точек и уравнения линий пластической области, характеризующие её геометрию, позволяющие определить поля деформаций и удельную диссипацию энергии в рассматриваемых решениях. На основе анализа распределения деформаций в пластической области и критерия (1.44) проводится выбор предпочтительного пластического течения.

### 2.2.1 Раздавливание острого клина гладким плоским штампом

Рассмотрим возможные схемы пластического течения при раздавливании острого клина гладким плоским штампом: решения, обладающие симметрией — Хилла (рисунок 2.3,(а)) и Прандтля (рисунок 2.3,(б))<sup>1</sup>, и решение с несимметричным течением (рисунок 2.3,(в)). Пластические области состоят из соответствующих прямоугольных треугольников с равномерным напряжённым состоянием, движущихся как жёсткое целое, соединённых центрированными веерами. Во всех решениях жёсткопластическая граница является линией разрыва поля скоростей перемещений, на которой проекция  $u$  скорости вдоль линий скольжения семейства  $\alpha$

– для решений (а) и (в):  $u = \sqrt{2}$ ;

---

<sup>1</sup> Симметричные пластические течения построены по аналогии с решениями Хилла и Прандтля для задачи о внедрении гладкого плоского штампа в жёсткопластическое полупространство [155]



– для решения (б):  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Кроме того, в решении (б) линия  $AD$  является также линией разрыва, вдоль которой скорость  $v = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , что приводит к дополнительному «скачку» деформаций при движении частицы в пластической области.

Решения являются автомодельными, то есть пластическая область сохраняет подобие относительно величины  $c$ , принимаемой за параметр времени  $t$ , при условии прямолинейности свободных поверхностей. При этом точка  $C$  всегда остаётся на первоначальной недеформированной поверхности клина. Представленные результаты соответствуют скорости перемещения штампа  $V = 1$  и значению  $c = 1$ , в противном случае результаты будут изменяться пропорционально величине  $c$ . Величина  $h$  усечения клина зависит от высоты  $c$  прямопропорционально и угла  $\eta$  центрированного веера. Автомодельность решений приводит к тому, что  $\eta \neq \eta(t)$  и модуль скорости  $h'$  изменения ширины усечения клина равен величине самого усечения в рассматриваемый момент времени. Соотношения, связывающие углы раствора клина  $\mu$  и веера  $\eta$ , величину усечения клина  $h$  и высоту  $c$ , имеют вид

$$(a) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{(1 + \sin \eta)^2}{\cos \eta (2 + \sin \eta)}, \quad \frac{h}{c} = \frac{1 + \sin \eta}{\cos \eta};$$

$$(б) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{(1 + 2 \sin \eta)^2}{4 \cos \eta (1 + \sin \eta)}, \quad \frac{h}{c} = \frac{1 + 2 \sin \eta}{2 \cos \eta};$$

$$(в) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\sqrt{(1 + \sin \eta)^2 + 1} - 1}{\cos \eta}, \quad \frac{h}{c} = \frac{\sqrt{(1 + \sin \eta)^2 + 1} + \sin \eta}{\cos \eta}.$$

Для решений в выбранной системе координат  $xOy$  характерные точки пластической области и участки линий разрыва поля скоростей определяются соответствующими координатами и уравнениями:

– для решения (а) координаты точек:

$$x_B = 0, \quad y_B = -t;$$

$$x_A = h, \quad y_A = -t;$$

$$x_C = h(1 + \sin \eta), \quad y_C = -t - h \cos \eta;$$

уравнения линий:

$$\text{линия } BD : y + x = -t;$$

$$\text{линия } DE : \begin{cases} x = x_A + R \cos \xi, \\ y = y_A + R \sin \xi; \end{cases}$$

$$\text{линия } EC : \frac{(\cos \eta + \sin \eta)y - (\sin \eta - \cos \eta)x}{\cos \eta + \sin \eta + h|_{c=1}(1 + \sin \eta - \cos \eta)} = -t;$$

– для решения (б) координаты точек:

$$x_A = h, \quad y_A = -t;$$

$$x_C = h(1 + 2 \sin \eta), \quad y_C = -t - 2h \cos \eta;$$

уравнения линий:

$$\text{линия } AD : \frac{y - x}{1 + h} = -t;$$

$$\text{линия } DE : \begin{cases} x = x_A + R \cos \xi, \\ y = y_A + R \sin \xi; \end{cases}$$

$$\text{линия } EC : \frac{(\cos \eta + \sin \eta)y - (\sin \eta - \cos \eta)x}{\cos \eta + \sin \eta + h|_{c=1}(2 + \sin \eta - \cos \eta)} = -t;$$

– для решения (в) координаты точек:

$$x_B = -c \operatorname{tg} \mu, \quad y_B = -t;$$

$$x_A = h - c \operatorname{tg} \mu = \frac{1 + \sin \eta}{\cos \eta} t, \quad y_A = -t;$$

$$x_C = x_A + h \sin \mu, \quad y_C = -t - h \cos \eta;$$

уравнения линий:

$$\begin{aligned} \text{линия } BD : & \quad \frac{y+x}{1+\operatorname{tg} \mu} = -t; \\ \text{линия } DE : & \quad \begin{cases} x = x_A + R \cos \xi, \\ y = y_A + R \sin \xi; \end{cases} \\ \text{линия } EC : & \quad \frac{(\cos \eta + \sin \eta)y - (\sin \eta - \cos \eta)x}{\cos \eta + \sin \eta + h|_{c=1}(\sin \eta - \cos \eta)x_A|_{c=1}} = -t; \end{aligned}$$

где

$$R = \begin{cases} \frac{h}{\sqrt{2}}, & \text{для решений (а) и (в)}, \\ \sqrt{2}h, & \text{для решения (б)}, \end{cases}$$

$\xi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha$  — угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $x$ .

Нормальная составляющая и разрыв касательной составляющей скорости движения частиц на линиях разрыва  $BDEC$  (в решениях (а) и (в)) и  $DEC$  (в решении (б)) равны  $V_\nu = 0$ ,  $[V_\tau] = \sqrt{2}$ ; на линии  $AD$  (в решении (б))  $V_n = [V_\tau] = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Распределение удельной диссипации энергии на этих линиях разрыва определяется согласно (1.11) формулой

$$W = \frac{[V_\tau]}{G + V_\nu},$$

где нормальная скорость  $G$  распространения линии разрыва в каждом решении определяется согласно (1.12) через уравнения её участков:

– в решении (а)

$$\begin{aligned} G_{BD} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ G_{DE} &= a' \cos \xi + b' \sin \xi + R', \quad \xi = \left[ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} + \eta \right], \\ G_{EC} &= \frac{\cos \eta + \sin \eta + h|_{c=1}(1 + \sin \eta - \cos \eta)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

где  $a' = \frac{1 + \sin \eta}{\cos \eta}$ ,  $b' = -1$ ,  $R' = \frac{1 + \sin \eta}{\sqrt{2} \cos \eta}$ ;

– в решении (б)

$$G_{AD} = \frac{1+h}{\sqrt{2}},$$

$$G_{DE} = a' \cos \xi + b' \sin \xi + R', \quad \xi = \left[ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} + \eta \right],$$

$$G_{EC} = \frac{\cos \eta + \sin \eta + h|_{c=1}(2 + \sin \eta - \cos \eta)}{\sqrt{2}},$$

где  $a' = \frac{1 + 2 \sin \eta}{2 \cos \eta}$ ,  $b' = -1$ ,  $R' = \frac{1 + 2 \sin \eta}{\sqrt{2} \cos \eta}$ ;

– в решении (в)

$$G_D = \frac{\cos \eta + \sqrt{(1 + \sin \eta)^2 + 1} - 1}{\sqrt{2} \cos \eta},$$

$$G_{DE} = a' \cos \xi + b' \sin \xi + R', \quad \xi = \left[ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} + \eta \right],$$

$$G_{EC} = \frac{\cos \eta + \sin \eta + h|_{c=1} + (\sin \eta - \cos \eta)x_A|_{c=1}}{\sqrt{2}},$$

где  $a' = \frac{1 + \sin \eta}{\cos \eta}$ ,  $b' = -1$ ,  $R' = \frac{\sqrt{(1 + \sin \eta)^2 + 1} + \sin \eta}{\sqrt{2} \cos \eta}$ .

Для всех решений  $a' = \frac{dx_A}{dt} = h|_{c=1}$ ,  $b' = \frac{dy_A}{dt}$  – компоненты скорости движения центра веера (точка  $A$ ),  $R' = \frac{dR}{dt} = \frac{h|_{c=1}}{\sqrt{2}}$ .

Приведённые соотношения используются согласно (1.32), (1.34) и (1.41) для определения поля деформаций при пересечении частицей пластической области (на линиях разрыва поля скоростей пересечений и в окрестности центра веера линий скольжения) вдоль траектории её движения. При этом до попадания в центрированный веер частицы первоначально деформируются на участке  $EC$  линии разрыва, то есть начальным условием для решения системы (1.41) является тензор дисторсии вида (1.32)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W_{EC} & 1 \end{bmatrix},$$

где  $W_{EC}$  — удельная диссипация энергии на линии  $EC$ .

Отметим, что рассмотренные решения задачи о раздавливании клина гладким плоским штампом имеют место при углах  $\eta \geq 0$ . Угол  $\eta$  обращается в нуль при следующих значениях для угла раствора клина:

$$\mu = \begin{cases} 26,6^\circ & \text{— решение Хилла,} \\ 14,04^\circ & \text{— решение Прандтля,} \\ 22,5^\circ & \text{— несимметричное решение.} \end{cases}$$

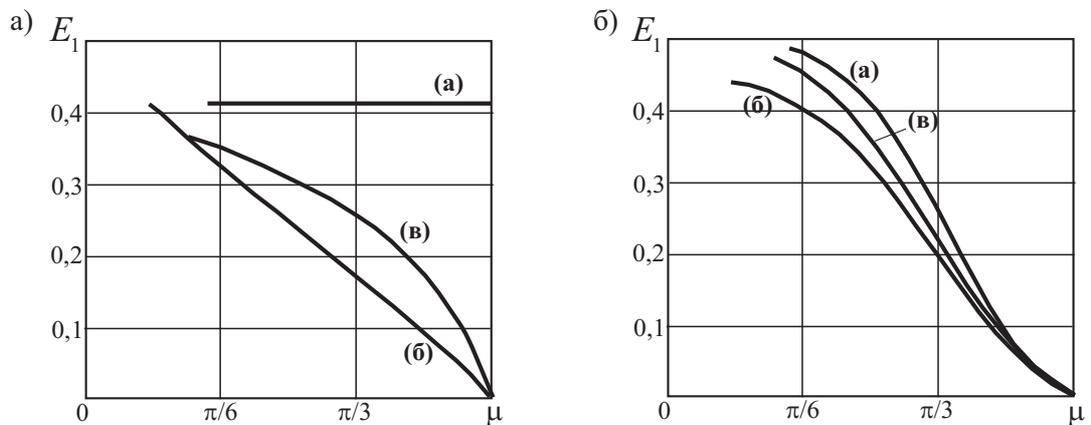


Рисунок 2.4 — Сравнение наибольших значений деформаций а) — на линии разрыва поля скоростей перемещений, б) — в окрестности центра веера линий скольжения ((а) — решение Хилла, (б) — решение Прандтля, (в) — несимметричное решение)

На рисунке 2.4 представлены графики сравнения наибольших значений деформаций (первого главного значения тензора конечных деформаций Альманси  $E_1$ ). В предложенных решениях наибольшие деформации наблюдаются как на линиях разрыва поля скоростей перемещений (рисунок 2.4, а), так и в окрестности центра веера линий скольжения (рисунок 2.4, б):

— для решения Хилла при  $\mu \in [26,6^\circ; 44^\circ)$  — в окрестности центра веера линий скольжения  $DAE$ ; при  $\mu > 44^\circ$  — на линии разрыва  $BDEC$ ;

— для решения Прандтля при  $\mu \in [14,04^\circ; 66,3^\circ)$  — в окрестности центра веера линий скольжения  $DAE$ ; при  $\mu > 66,3^\circ$  — на линии разрыва  $DEC$ ;

– для несимметричного решения при  $\mu \in [22, 5^\circ; 53, 3^\circ)$  – в окрестности центра веера линий скольжения  $DAE$ ; при  $\mu > 53, 3^\circ$  – на линии разрыва  $BDEC$ .

Согласно критерию (1.44) предпочтительным является решение Прандтля (рисунок 2.3,(б)), поскольку в этом решении при различных значениях угла  $\mu$  наибольшие деформации являются минимальными.

### 2.2.2 Раздавливание усечённого клина гладким плоским штампом

Решение данной задачи представляет наибольший интерес в рамках теории плоской деформации идеального жёсткопластического тела с точки зрения решения задач с учётом изменения геометрии свободной поверхности. В [156] показано, что обобщение решений для задач, в которых пластическое течение начинается с некоторой поверхности конечных размеров, возможно только при наличии у тела прямолинейных границ. Ниже рассматриваются возможные пластические течения в решении задачи о раздавливании усечённого клина  $y = kx + c$ ,  $k = -\operatorname{ctg} \mu$  гладким плоским штампом с начальной шириной усечения  $h_0 = -\frac{c}{k}$ , рисунок 2.5. Рассматриваемые решения являются обобщениями решений, представленных в разделе 2.2.1. Отличие от предыдущих решений заключается в том, что рассматриваемые в настоящем разделе пластические течения не являются геометрически подобными. Предполагается, что пластическое состояние возникает в конечной области в начальный момент времени и часть подвижной границы  $AC$  перемещается поступательно по закону

$$y = Y(x, t) = k \left( x - \int_0^t V_x(t) dt \right) + \int_0^t V_y(t) dt, \quad (2.1)$$

где  $V_x(t) = u \cos \left( \frac{\pi}{4} - \eta(t) \right)$ ,  $V_y(t) = -u \sin \left( \frac{\pi}{4} - \eta(t) \right)$  – проекции скорости на координатные оси;  $u$  – компоненты скорости движения частиц вдоль ли-

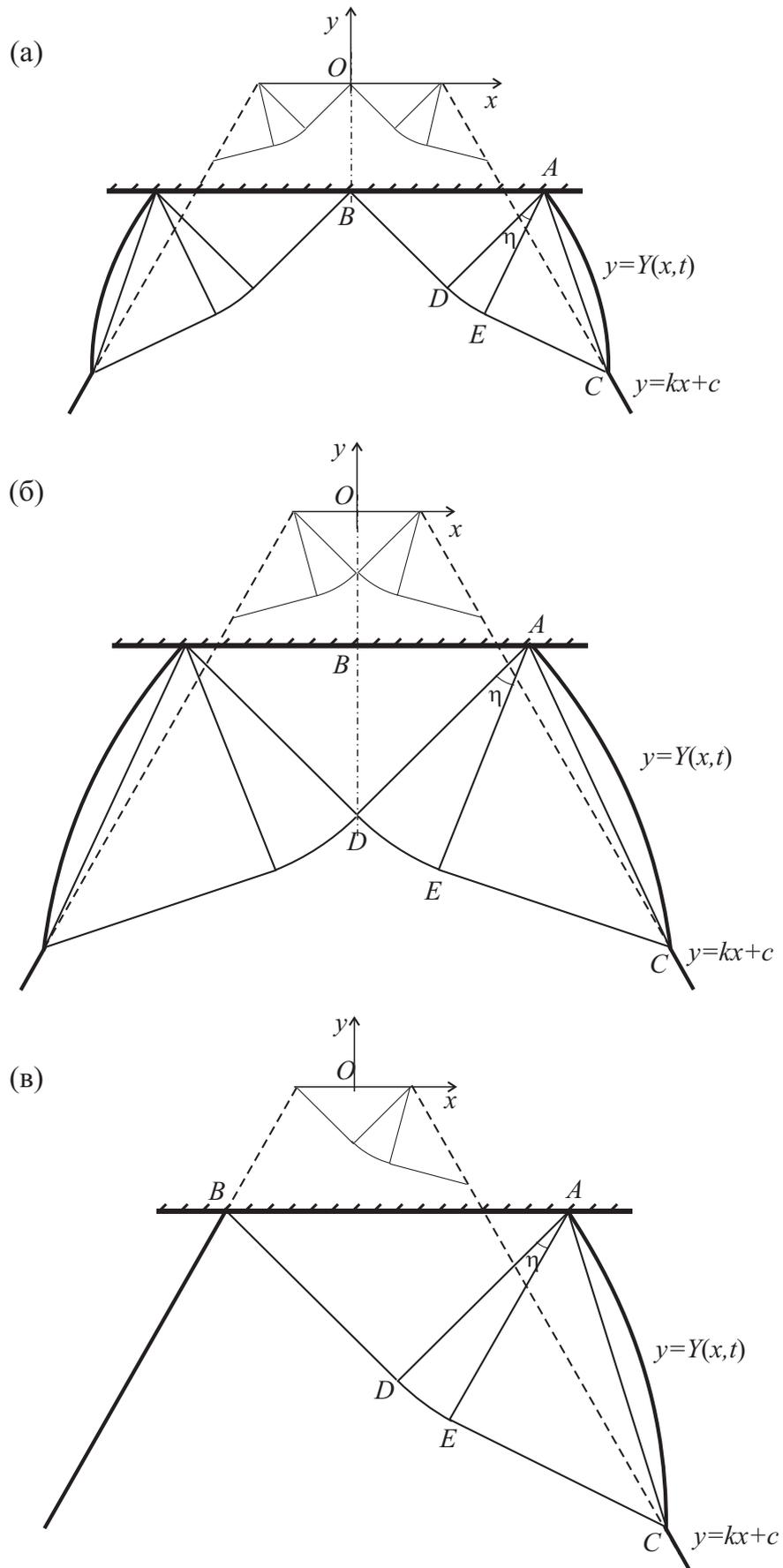


Рисунок 2.5 — Возможные пластические течения при раздавливании усечённого клина гладким плоским штампом: (а) — обобщённое решение Хилла, (б) — обобщённое решение Прандтля, (в) — несимметричное решение

нии скольжения  $\alpha$ :

- для решений (а) и (в):  $u = \sqrt{2}$ ;
- для решения (б):  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

При этом за временной параметр  $t$  берётся глубина внедрения штампа в процессе раздавливания клина.

Пластические течения построены при предположении, что

- точка  $A$  в каждый момент времени является пересечением подвижной границы (2.1) и плоскости штампа ( $y = -t$ ):  $Y(x, t) = -t$ ;
- точка  $C$  в процессе деформирования всегда остаётся на недеформированной поверхности клина:  $y_C(t) = kx_C(t) + c$ .

В процессе движения штампа координаты точек рассматриваемых пластических областей определяются соотношениями:

- для решения (а)

$$\begin{aligned} x_B(t) &= 0, \quad y_B(t) = -t; \\ x_A(t) &= \frac{-(t+c)}{k+k\sin\eta(t)+\cos\eta(t)}, \quad y_A(t) = -t; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$x_C(t) = x_A(t)(1+\sin\eta(t)), \quad y_C(t) = -t - x_A(t)\cos\eta(t);$$

- для решения (б)

$$x_A(t) = \frac{-(t+c)}{k+2k\sin\eta(t)+2\cos\eta(t)}, \quad y_A(t) = -t; \quad (2.3)$$

$$x_C(t) = x_A(t)(1+2\sin\eta(t)), \quad y_C(t) = -t - 2x_A(t)\cos\eta(t);$$

- для решения (в)

$$\begin{aligned} x_B(t) &= -t \operatorname{tg} \mu, \quad y_B(t) = -t; \\ x_A(t) &= \frac{t[1+(k\sin\eta(t)+\cos\eta(t))\operatorname{tg} \mu] + c}{k+k\sin\eta(t)+\cos\eta(t)}, \quad y_A(t) = -t; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$x_C(t) = x_A(t)(1+\sin\eta(t)) + t \operatorname{tg} \mu \sin\eta(t),$$

$$y_C(t) = -t(1+\operatorname{tg} \mu \cos\eta(t)) - x_A(t)\cos\eta(t).$$

Соотношения координат (2.2)–(2.4) и уравнение свободной поверхности (2.1) позволяют получить следующие дифференциальные уравнения:

$$(a) \quad \frac{1}{t+c} = \frac{k(k \cos \eta(t) - \sin \eta(t))}{m^2(t)(-1+n(t)) + km(t)} \eta'(t), \quad (2.5a)$$

$$(б) \quad \frac{1}{t+c} = \frac{4k(k \cos \eta(t) - \sin \eta(t))}{m^2(t)(-2+n(t)) + 2km(t)} \eta'(t), \quad (2.5б)$$

$$(в) \quad \frac{1}{2t+c} = \frac{k(k \cos \eta(t) - \sin \eta(t))}{m^2(t)(-1+n(t)) + am(t)[1 + (k \sin \eta(t) + \cos \eta(t)) \operatorname{tg} \mu]} \eta'(t), \quad (2.5в)$$

где

$$m(t) = \begin{cases} k + k \sin \eta(t) + \cos \eta(t), & \text{для решений (а) и (в),} \\ k + 2k \sin \eta(t) + 2 \cos \eta(t), & \text{для решения (б),} \end{cases}$$

$$n(t) = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \eta(t) \right) + \sqrt{2}k \sin \left( \frac{\pi}{4} + \eta(t) \right).$$

Решением уравнений (2.5) является функция  $\eta(t)$  изменения угла раствора центрированного веера для каждого течения. Данное решение справедливо до тех пор, пока  $\eta'(t) > 0$  и подвижная граница  $AC$  определяется уравнением (2.1). Анализ решений уравнений (2.5) показывает, что в процессе движения угол  $\eta(t)$  раствора центрированного веера уменьшается, причём  $\eta_0 = \mu$ .

Далее, как и в предыдущей задаче о раздавливании острого клина для всех решений жёсткопластическая граница ( $BDEC$  для решений (а) и (в),  $DEC$  для решения (б)) и линия  $AD$  (в решении (б)) являются линиями разрыва поля скоростей перемещений, на которых значения нормальной составляющей и разрыва касательной составляющей скорости движения частиц определяются аналогично (см. раздел 2.2.1). При этом уравнения частей линий разрыва определяются следующими выражениями:

– для решения (а)

$$\text{линия } BD : y + x = -t;$$

$$\text{линия } DE : \begin{cases} x = x_A(t) + R(t) \cos \xi(t), \\ y = y_A(t) + R(t) \sin \xi(t), \end{cases} \quad R(t) = \frac{h}{\sqrt{2}};$$

$$\text{линия } EC : y + \frac{(\cos \eta(t) - \sin \eta(t))x + (1 - \cos \eta(t) + \sin \eta(t))x_A(t)}{\cos \eta(t) + \sin \eta(t)} = -t;$$

– для решения (б)

$$\text{линия } AD : y - x + x_A(t) = -t;$$

$$\text{линия } DE : \begin{cases} x = x_A(t) + R(t) \cos \xi(t), \\ y = y_A(t) + R(t) \sin \xi(t), \end{cases} \quad R(t) = \sqrt{2}h;$$

$$\text{линия } EC : y + \frac{(\cos \eta(t) - \sin \eta(t))x + (2 - \cos \eta(t) + \sin \eta(t))x_A(t)}{\cos \eta(t) + \sin \eta(t)} = -t;$$

– для решения (в)

$$\text{линия } BD : \frac{y + x}{1 + \operatorname{tg} \mu} = -t;$$

$$\text{линия } DE : \begin{cases} x = x_A(t) + R(t) \cos \xi(t), \\ y = y_A(t) + R(t) \sin \xi(t), \end{cases} \quad R(t) = \frac{x_A(t) + t \operatorname{tg} \mu}{\sqrt{2}};$$

$$\begin{aligned} \text{линия } EC : y + \frac{(\cos \eta(t) - \sin \eta(t))x + (1 - \cos \eta(t) + \sin \eta(t))x_A(t)}{\cos \eta(t) + \sin \eta(t)} = \\ = -t \left[ 1 + \frac{\operatorname{tg} \mu}{\cos \eta(t) + \sin \eta(t)} \right]; \end{aligned}$$

где  $\xi(t) = \alpha(t) - \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha(t)$  – угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $x$  в текущий момент времени.

Нормальная скорость  $G$  распространения линий разрыва в каждом решении определяется согласно (1.12) через уравнения соответствующих участков:

– в решении (а)

$$G_{BD}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$G_{DE}(t) = a'(t) \cos \xi(t) + b'(t) \sin \xi(t) + R'(t), \quad \xi(t) = \left[ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} + \eta(t) \right];$$

$$G_{EC}(t) = \frac{\eta'(t) [-2x + x_A(t)(2 + \sin \eta(t) - \cos \eta(t))]}{\sqrt{2}(\cos \eta(t) + \sin \eta(t))} + \\ + \frac{[\cos \eta(t) + \sin \eta(t) - \cos 2\eta(t)]a'(t) + 1 + \sin 2\eta(t)}{\sqrt{2}(\cos \eta(t) + \sin \eta(t))};$$

где

$$a'(t) = \frac{-(k + k \sin \eta(t) + \cos \eta(t)) + (t + c)(k \cos \eta(t) - \sin \eta(t))\eta'(t)}{(k + k \sin \eta(t) + \cos \eta(t))^2}, \\ b'(t) = -1, \quad R'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}a'(t);$$

– в решении (б)

$$G_{AD}(t) = \frac{1 + a'}{\sqrt{2}},$$

$$G_{DE}(t) = a'(t) \cos \xi(t) + b'(t) \sin \xi(t) + R'(t), \quad \xi(t) = \left[ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} + \eta(t) \right],$$

$$G_{EC}(t) = \frac{\eta'(t) [-2x + 2x_A(t)(1 + \sin \eta(t) - \cos \eta(t))]}{\sqrt{2}(\cos \eta(t) + \sin \eta(t))} + \\ + \frac{[2 \cos \eta(t) + 2 \sin \eta(t) - \cos 2\eta(t)]a'(t) + 1 + \sin 2\eta(t)}{\sqrt{2}(\cos \eta(t) + \sin \eta(t))};$$

где

$$a'(t) = \frac{-(k + 2k \sin \eta(t) + 2 \cos \eta(t)) + 2(t + c)(k \cos \eta(t) - \sin \eta(t))\eta'(t)}{(k + 2k \sin \eta(t) + 2 \cos \eta(t))^2}, \\ b'(t) = -1, \quad R'(t) = \frac{a'(t)}{\sqrt{2}};$$

– в решении (в)

$$G_D = \frac{1 + \operatorname{tg} \mu}{\sqrt{2}},$$

$$G_{DE} = a' \cos \xi(t) + b' \sin \xi(t) + R', \quad \xi(t) = \left[ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} + \eta(t) \right],$$

$$G_{EC} = \frac{\eta'(t) [-2x + x_A(t)(2 + \sin \eta(t) - \cos \eta(t))] + t \operatorname{tg} \mu (\sin \eta(t) - \cos \eta(t))}{\sqrt{2}(\cos \eta(t) + \sin \eta(t))} + \\ + \frac{[\cos \eta(t) + \sin \eta(t) - \cos 2\eta(t)]a'(t) + 1 + \sin 2\eta(t)}{\sqrt{2}(\cos \eta(t) + \sin \eta(t))} + \\ + \frac{\operatorname{tg} \mu (\cos \eta(t) + \sin \eta(t))}{\sqrt{2}(\cos \eta(t) + \sin \eta(t))};$$

где

$$a' = \frac{-[1 + (k \sin \eta(t) + \cos \eta(t)) \operatorname{tg} \mu](k + k \sin \eta(t) + \cos \eta(t))}{(k + k \sin \eta(t) + \cos \eta(t))^2} + \\ + \frac{2(t + c)(k \cos \eta(t) - \sin \eta(t))\eta'(t)}{(k + k \sin \eta(t) + \cos \eta(t))^2}, \\ b' = -1, \quad R' = \frac{a'(t) + \operatorname{tg} \mu}{\sqrt{2}}.$$

Здесь  $a'(t)$ ,  $b'(t)$  — компоненты скорости движения центра веера (точка  $A$ ), используемые при определении деформаций частицы в пластической области согласно (1.41). В отличие от задачи раздела 2.2.1 в задаче о раздавливании усечённого клина пластическое течение начинается от некоторой поверхности конечного размера. Следовательно, до определённого момента в центрированный веер попадают частицы первоначально не деформированные, то есть начальным условием для решения системы (1.41) является тензор дисторсии единичного вида (1.31)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сравнение наибольших значений деформаций на линиях разрыва поля скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения для рассматриваемых решений показывает, что решение Прандтля (рисунок 2.5, (б)) является предпочтительным согласно критерию (1.44).

## 2.3 Одноосное растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами

Процесс распространения трещины в упругопластическом теле может быть описан на основе процесса распространения углового выреза вместе в небольшой пластической областью, окружающей его вершину. При этом распространение углового выреза может происходить как в разрушением, так и без него, что связано с «выходом» частиц на свободную поверхность трещины изнутри материала. В рамках теории плоской деформации идеального жёсткопластического тела задачи о растяжении полосы, ослабленной симметричными глубокими вырезами различной формы, рассматривались многими авторами, [47, 65, 79, 146, 155, 158]. В настоящем разделе рассматриваются возможные пластические течения в окрестности вершины  $V$ -образного выреза при одноосном растяжении полосы. Известными решениями этой задачи являются решения, предложенные Е. Ли [199] и О. Ричмондом [208], имеющие, как будет показано ниже, определённые противоречия при описании рассматриваемого процесса. Решение с несимметричным пластическим течением, предложенное автором [35, 170], является полным в каждый момент времени и позволяет описывать процесс растяжения полосы с вырезами как с разрушением, так и без него.

Выводы о возможности описания пластического течения с разрушением или без него осуществляются на основе сравнения скорости частиц в пластической области и скорости движения вершины выреза, при условии, что вершина выреза является точкой пересечения его свободных поверхностей.

### 2.3.1 Решения Е. Ли

В работе [199] рассматриваются два возможных пластических течения в окрестности вершины  $V$ -образного выреза при одноосном растяжении беско-

нечной полосы. Решения являются обобщениями решений задачи о внедрении гладкого плоского штампа в полупространство (рисунок 2.6): обобщённое решение Хилла и обобщённое решение Прандтля. Подход к решению задачи о растяжении полосы с вырезами рассматривался Е. Ли как решение обратной задачи о сжатии клина плоским штампом. Однако в задачах о растяжении и сжатии образование новых свободных поверхностей происходит различным образом, что существенно влияет на построение решения и его непротиворечивость.

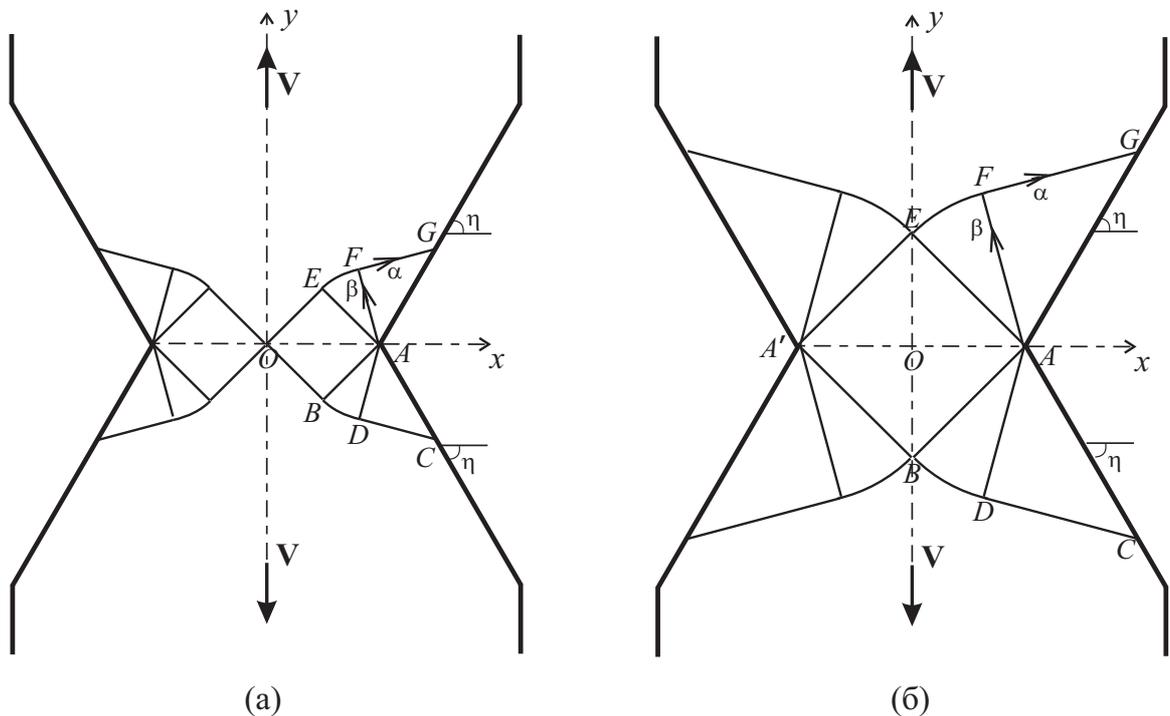


Рисунок 2.6 — Возможные пластические течения при растяжении полосы с  $V$ -образными вырезами: (а) — обобщённое решение Хилла, (б) — обобщённое решение Прандтля

Предлагаемые пластические области состоят из прямоугольных треугольников с равномерным напряжённым состоянием, соединённых центрированными веерами линий скольжения. Решения рассматриваются при предположении, что:

- величина угла  $\eta$  раствора  $V$ -образного выреза остаётся постоянной в

процессе равномерного растяжения полосы с постоянной скоростью  $V$  в обе стороны;

– угловая точка  $A$ , являющаяся центром веера линий скольжения, образуется пересечением свободных поверхностей  $AC$  и  $AG$ , и всегда остаётся на свободной поверхности, что приводит к сохранению структуры поля линий скольжения.

Отметим, что для простоты выкладок анализ решений приводится для случая растяжения полосы со скоростью  $V = 1$ , в противном случае результаты будут изменять пропорционально.

Граничные условия для скоростей на соответствующих линиях разрыва в рассматриваемых решениях имеют вид:

– для решения (а)

$$OBDC : \quad u = -\sin \varphi, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} - \eta \right];$$

$$OEF G : \quad u = \cos \varphi, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \eta \right];$$

– для решения (б)

$$AB : \quad v = 0; \quad EA : \quad u = 0;$$

$$BDC : \quad u = -\sin \varphi, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} - \eta \right];$$

$$EFG : \quad u = \cos \varphi, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \eta \right];$$

где  $u, v$  – проекции скоростей вдоль соответствующих линий скольжения семейств  $\alpha, \beta$ ;  $\varphi$  – угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $x$ .

При данных граничных условиях согласно соотношениям Гейрингер (1.5) поля скоростей в пластических областях имеют следующие распределения:

– для решения (а)

$$OBA : \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$BAD : \quad u = -\sin \varphi, \quad v = -\cos \varphi + \sqrt{2}, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} - \eta \right];$$

$$ADC : \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \eta + \sin \eta), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \cos \eta - \sin \eta);$$

$$OEA : \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$EAF : \quad v = \cos \varphi, \quad u = \sin \varphi - \sqrt{2}, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \eta \right];$$

$$AFG : \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \eta + \sin \eta), \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \cos \eta - \sin \eta);$$

– для решения (б)

$$ABA'E : \quad u = 0, \quad v = 0;$$

$$BAD : \quad u = -\sin \varphi, \quad v = -\cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} - \eta \right];$$

$$ADC : \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \eta + \sin \eta), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos \eta - \sin \eta);$$

$$EAF : \quad v = \cos \varphi, \quad u = \sin \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \eta \right];$$

$$AFG : \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \eta + \sin \eta), \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos \eta - \sin \eta).$$

Переход к проекциям скоростей на декартовые оси координат  $x, y$  согласно (1.6) даёт скорости движения прямоугольных областей:

– в решении (а)

$$OBAE : \quad V_x = -1, \quad V_y = 0;$$

$$ADC : \quad V_x = -(\cos \eta + \sin \eta), \quad V_y = -(1 + \cos \eta - \sin \eta);$$

$$AFG : \quad V_x = -(\cos \eta + \sin \eta), \quad V_y = (1 + \cos \eta - \sin \eta);$$

– в решении (б)

$$ABA'E : \quad V_x = 0, \quad V_y = 0;$$

$$ADC : \quad V_x = -\frac{1}{2}(\cos \eta + \sin \eta), \quad V_y = -\frac{1}{2}(2 + \cos \eta - \sin \eta);$$

$$AFG : \quad V_x = -\frac{1}{2}(\cos \eta + \sin \eta), \quad V_y = \frac{1}{2}(2 + \cos \eta - \sin \eta).$$

Из условия определения положения точки  $A$  через пересечение свободных поверхностей  $AC$  и  $AG$  скорость движения вершины выреза определяется соотношениями:

$$V_x^A = V_y \operatorname{ctg} \eta + V_x, \quad V_y^A = 0,$$

из которых следует, что вершина выреза перемещается горизонтально в направлении центра полосы с соответствующими скоростями:

$$\text{– в решении (а)} \quad V^A = -\operatorname{ctg} \frac{\eta}{2};$$

$$\text{– в решении (б)} \quad V^A = -\operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2 \sin \eta}.$$

При этом из полученного распределения скоростей следует, что в решении (а) частицы из области  $OBAE$  перемещаются вместе с этой областью горизонтально в направлении центра полосы с единичной скоростью; в решении же (б) материал в области  $ABA'E$  остаётся в покое. Сравнение в обоих решениях в окрестности вершины выреза (точка  $A$ ) характера движения частиц, которые примыкают к свободной поверхности выреза и находятся в соответствующих областях  $OBAE$  ( $ABA'E$ ), показывает, что при любом значении  $\eta$  угловая точка выреза внедряется в материал, что возможно только при разрушении. Следовательно, решения, предложенные Е. Ли [199], позволяют описать пластическое течение рассматриваемой задачи без разрушения только в начальный момент времени  $t = 0$ , при  $t > 0$  предлагаемые течения описывают пластические течения с разрушением.

### 2.3.2 Решение О. Ричмонда

Решение задачи об одноосном растяжении полосы с  $V$ -образными вырезами, предложенное О. Ричмондом [208], является ещё одним широко известным решением (рисунок 2.7), которое может быть представлено как частный случай решения задачи о внедрении гладкого плоского штампа в жёсткопластическое полупространство, предложенное Г. И. Быковцевым [46].

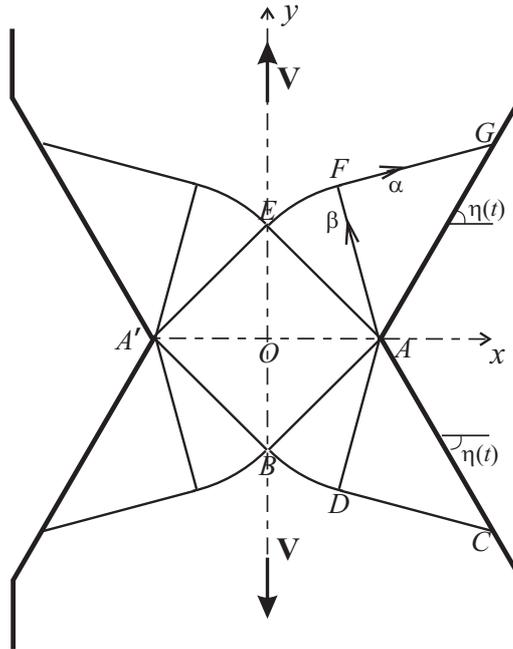


Рисунок 2.7 — Пластическое течение при растяжении полосы с  $V$ -образными вырезами с вращением свободной поверхности (решение О. Ричмонда)

Решение является симметричным и строится при предположении вращения свободной поверхности в процессе растяжения полосы, что возможно в результате однородности поля скоростей в области  $ABA'E$ . При этом вращение свободных поверхностей  $AC$  и  $AG$  происходит при линейном распределении поля скоростей в пластической области. Причём в процессе деформирования полосы угол  $V$ -образного выреза уменьшается по закону

$$\eta(t) = \eta_0 + \int_0^t \omega(t) dt, \quad (2.6)$$

где  $\eta_0$  — начальная величина углового выреза,  $\omega(t)$  — угловая скорость вращения свободной поверхности.

Как и в предыдущих решениях пластическая область состоит из прямоугольных треугольников с равномерным напряжённым состоянием, которые соединены центрированными веерами. В отличие от обобщённого решения Прандтля (рисунок 2.6, (б)) в данном решении линиями разрыва поля скоростей перемещений являются только жёсткопластические границы  $EFG$  и  $BDC$ , линии  $AE$  и  $AB$  линиями разрыва не являются, ввиду предположения линейности поля скоростей в пластической области. Распределение нормальных составляющих скоростей на линиях  $AB$  и  $AE$  имеют вид:

$$v_{l_\alpha}^{AB}(t) = -\frac{l_\alpha(t)}{x_A(t)} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_{l_\beta}^{AE}(t) = \frac{l_\beta(t)}{x_A(t)} - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

где  $l_\alpha, l_\beta$  — локальные координаты линий скольжения семейств  $\alpha, \beta$  вдоль линий  $AB$  и  $AE$ : в точке  $A$   $l_\alpha^A = l_\beta^A = 0$ , в точках  $B$  и  $E$   $l_\alpha^B(t) = l_\beta^E(t) = \sqrt{2}x_A(t)$ . Граничные условия для скоростей на линиях разрыва поля скоростей перемещений задаются соотношениями

$$BDC : \quad u(t) = -\sin \varphi(t), \quad \varphi(t) \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} - \eta(t) \right];$$

$$EFG : \quad v(t) = \sin \varphi(t), \quad \varphi(t) \in \left[ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \eta(t) \right].$$

При данных граничных условиях и линейном распределении скоростей на линиях  $AB$  и  $AE$  согласно соотношениям (1.5) поле скоростей в пластической области имеет вид:

– на линиях:

$$AB : \quad v_{l_\alpha}(t) = -\frac{l_\alpha(t)}{x_A(t)} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_{l_\alpha}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$AE : \quad u_{l_\beta}(t) = \frac{l_\beta(t)}{x_A(t)} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_{l_\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$AD : \quad \begin{cases} v_{l_\alpha}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2} \frac{l_\alpha(t)}{x_A(t)} + \sin \eta(t) - \cos \eta(t) - 2 \right], \\ u_{l_\alpha}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \eta(t) + \sin \eta(t)]; \end{cases}$$

$$AF : \quad \begin{cases} u_{l_\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2} \frac{l_\beta(t)}{x_A(t)} + \sin \eta(t) - \cos \eta(t) - 2 \right], \\ v_{l_\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \eta(t) + \sin \eta(t)]; \end{cases}$$

– областях:

$$ADC : \begin{cases} v_{l_{AC}}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{l_{AC}(t)}{x_A(t)} + \sin \eta(t) - \cos \eta(t) - 2 \right], \\ u_{l_{AC}}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \eta(t) + \sin \eta(t)]; \end{cases}$$

$$AFG : \begin{cases} u_{l_{AG}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2} \frac{l_{AG}(t)}{x_A(t)} + \sin \eta(t) - \cos \eta(t) - 2 \right], \\ v_{l_{AG}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \eta(t) + \sin \eta(t)]; \end{cases}$$

$$ABA'E : \quad \begin{aligned} V_x^A &= -V_x^{A'} = V_y^B = -V_y^E = -1; \\ V_y^A &= -V_y^{A'} = V_x^B = -V_x^E = 0; \end{aligned}$$

где  $l_{AC} = \sqrt{2}l_\alpha$  и  $l_{AG} = \sqrt{2}l_\beta$  — локальные координаты на линиях  $AC$  и  $AG$ , соответственно. Распределение нормальных скоростей на линиях пластической области показано на рисунке 2.8 (ввиду симметрии пластической области распределение представлено для четверти нижней полуплоскости). Точка  $N$ , являющаяся центром вращения свободной поверхности, перемещается по касательной к линии  $AC$ , и вектор её скорости коллинеарен единичному вектору направления с координатами  $\{\cos \eta(t), -\sin \eta(t)\}$ .

Скорость движения угловой точки  $V$ -образного выреза определяется также как и в предыдущих решениях задачи из предположения положения этой точки в виде пересечения двух свободных поверхностей  $AC$  и  $AG$ , и при определённом выше поле скоростей на линиях и в областях пластической области имеет только ненулевую горизонтальную составляющую:

$$V_x^A = \frac{dx_A(t)}{dt} = -\operatorname{ctg} \frac{\eta(t)}{2}, \quad (2.7)$$

которая совпадает с аналогичным значением в решении Е. Ли, представленного на рисунке 2.6, (а). При этом скорость изменения угла  $V$ -образного выреза определяется соотношением

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \omega(t) = -\frac{1}{2x_A(t)}. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) и (2.8) дают систему дифференциальных уравнений для функций  $x_A(t)$ ,  $\eta(t)$ , позволяющих описать схему пластического течения, предложенную О. Ричмондом (рисунок 2.7).

Сравнение скоростей движения частиц в области  $ABA'E$  и движущихся со свободной поверхностью согласно (2.7) позволяет сделать вывод, что решение О. Ричмонда также описывает пластическое течение при растяжении полосы в любой момент времени с разрушением, поскольку угловая точка при любом значении  $\eta(t)$  внедряется в материал. Кроме того, согласно полю скоростей в пластической области при движении двух частиц, достаточно близко примыкающих к вершине выреза сверху и снизу, расстояние между новым положением одной частицы до продолжения свободной поверхности, в положение которой переместится вторая частица, определяется выражением

$$d = Vt |\cos(2\eta) + 2 \cos \eta - \sin(2\eta) + 1|,$$

и будет обращаться в нуль только при  $t = 0$  или  $\eta = \frac{\pi}{2}$ . То есть в любом другом случае внутри пластической области будет наблюдаться образование полости, что не возможно без нарушения сплошности материала.

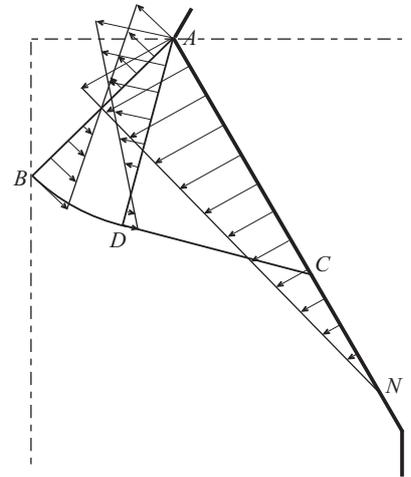


Рисунок 2.8 — Распределение поля скоростей перемещений в пластической области для решения О. Ричмонда ( $\eta = 60^\circ$ )

Отметим, что решение рассмотрено для случая растяжения полосы со скоростью  $V = 1$ , в противном случае результаты будут изменяться пропорционально приведённым.

### 2.3.3 Несимметричное пластическое течение

Решение с несимметричным течением в окрестности вершины выреза рассматривается в работах [9, 35, 170]. Предполагается, что в пластическом со-

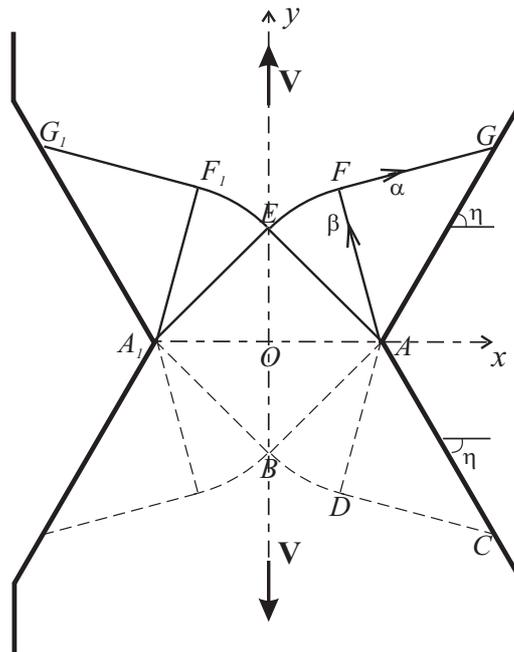


Рисунок 2.9 — Несимметричное пластическое течение при растяжении полосы с  $V$ -образными вырезами

стоянии находится только верхняя (или нижняя) полуплоскость, рисунок 2.9. Полоса растягивается равномерно со скоростью  $V = 1$ . При этом пластическая область состоит из двух прямоугольных треугольников с равномерным напряжённым состоянием, соединённых центрированным веером. Далее будем рассматривать правую часть полосы. Линии  $AE$  и  $EFG$  являются линиями разрыва поля скоростей перемещений, на которых граничные условия

определяются в виде:

$$\begin{aligned} AE : \quad u &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ EFG : \quad v &= \cos \varphi, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \eta \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поле скоростей в пластической области при указанных граничных условиях согласно соотношениям (1.5) имеет распределение

$$\begin{aligned} A_1EA : \quad v &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ EAF : \quad v &= \cos \varphi, \quad u = \sin \varphi - \sqrt{2}, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \eta \right]; \\ AFG : \quad v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \eta + \sin \eta), \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \cos \eta - \sin \eta). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Откуда согласно (1.6) скорость движения частиц на линии  $AG$  определяется следующими компонентами:

$$V_x = -(\cos \eta + \sin \eta), \quad V_y = 1 + \cos \eta - \sin \eta. \quad (2.11)$$

В предыдущих решениях (см. разделы 2.3.1, 2.3.2) предполагалось, что положение вершины  $V$ -образного выреза в процессе деформирования определяется пересечением его свободных поверхностей. При несимметричном пластическом течении (рисунок 2.9) положение вершины выреза (точка  $A$ ) определяется неоднозначно, поскольку в ней происходит образование новой поверхности, положение которой зависит от движения точки  $A$ .

Возможное поле скоростей частиц материала в окрестности точки  $A$  показано на рисунке 2.10, где точка  $N'$  — предельная точка подвижной жёсткой области  $AFG$ , точка  $M'$  — предельная точка подвижной поверхности  $AC$ , примыкающие к точке  $A$ . При условии, что точка  $A$  всегда должна оставаться на свободной поверхности, рассматриваемое поле скоростей будет определять скорость движения  $\mathbf{m}$  точки  $A$  при различных направлениях, задаваемых углом  $\psi$ .

Очевидно, что для существования статически допустимого продолжения поля напряжений в нижнюю часть полосы вершина выреза в процессе деформирования должна находиться на линии  $C'M'A'N'G'$ . При этом вновь образующийся элемент свободной поверхности на участке  $M'A^*$  должен составлять с осью  $x$  угол  $\eta_1 \leq \eta$ , [179].

Возможны два случая образования новых свободных поверхностей в процессе деформирования. Если предположить, что направление движения точки  $A$  будет находиться внутри области  $A'AN'$ , то образование новой деформированной поверхности должно определяться полем скоростей частиц, находящихся внутри угла  $A'AN'$ . Из схемы, представленной на рисунке 2.10, видно, что частицы, лежащие на линии  $A'N'G'$  в процессе движения не могут образовывать прямую линию, и следовательно геометрия пластической области (см. рисунок 2.9) не будет сохранять своего вида в течение всего процесса деформирования.

Предположим теперь, что направление движения точки  $A$  находится внутри угла  $N'AG$ , при этом точка  $A$  движется вдоль подвижной поверхности  $AG$ . Тогда в окрестности точки  $A$  будет образовываться новая прямолинейная поверхность  $M'N'$ , угол наклона которой определяется скоростью движения точки  $A$  вдоль линии  $AG$ . Согласно (2.11) нормальная скорость движения линии  $AG$  равна

$$V_n^{AG} = 1 + \cos \eta.$$

При этом касательная составляющая скорости точки  $A$  вдоль  $AG$  однознач-

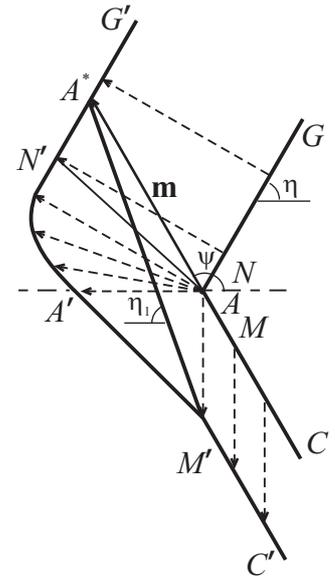


Рисунок 2.10 — Схема движения вершины V-образного выреза при несимметричном пластическом течении

но определяется величиной нормальной составляющей. Положение точки  $A$ , при котором скорость её движения совпадает со скоростью движения частиц, примыкающих к поверхности  $AG$ , является предельным. В этом случае центр веера характеристик находится всегда в одной и той же частице материала на поверхности  $AG$ , примыкающей к центру веера со стороны жёсткопластической области  $AFG$ , и скорость движения центра  $\{a', b'\}$  совпадает со скоростью движения частиц с поверхности  $AG$  (2.11):  $a' = V_x^A$ ,  $b' = V_y^A$ . Угол  $\psi$ , определяющий направление движения точки  $A$  в процессе деформирования, изменяется в интервале  $[0, \psi_1]$ , где  $\psi_1 = \pi - \arctg\left(\frac{V_y}{|V_x|}\right)$ .

Учитывая вышесказанное, направление движения вершины выреза (точки  $A$ ) определяется из условия (1.44) в виде

$$\inf_{\psi} \sup_{\varphi} E_1(\varphi, \psi), \quad (2.12)$$

где  $E_1(\varphi, \psi)$  — функция, характеризующая распределение деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения при различных изменениях пластической области в процессе деформирования;  $\varphi$  — угол, определяющий положение частицы внутри централизованного веера;  $\psi$  — угол, характеризующий направление движения центра веера характеристик (точки  $A$ ). Распределение деформаций в окрестности центра веера определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.41) в компонентах тензора дисторсии. При этом скорость движения центра веера определяется компонентами в виде

$$a' = V_x^A = \frac{V_n^{AG}}{\sin(\psi - \eta)} \cos \psi, \quad b' = V_y^A = \frac{V_n^{AG}}{\sin(\psi - \eta)} \sin \psi.$$

Учитывая, что частица до попадания в веер не деформировалась, начальными условиями для решения системы (1.41) является тензор дисторсии

единичного вида (1.31):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Первое главное значение  $E_1$  тензора Альманси определяется согласно (1.42).

Задача определения положения вновь образующейся поверхности сводится к определению угла  $\eta_1$  наклона этой поверхности как углового коэффициента прямой, характеризующей положение линии  $M'N'$ :

$$\eta_1 = \arctg \left[ -\frac{y_{M'} - y_{N'}}{x_{M'} - x_{N'}} \right] = \arctg \left[ -\frac{1 + b'}{a'} \right],$$

так как координаты частиц, занимающих текущие положения точек  $M'$  и  $N'$ , равны

$$x_{N'} = x_A^0 + a't, \quad y_{N'} = b't; \quad x_{M'} = x_A^0, \quad y_{M'} = -t.$$

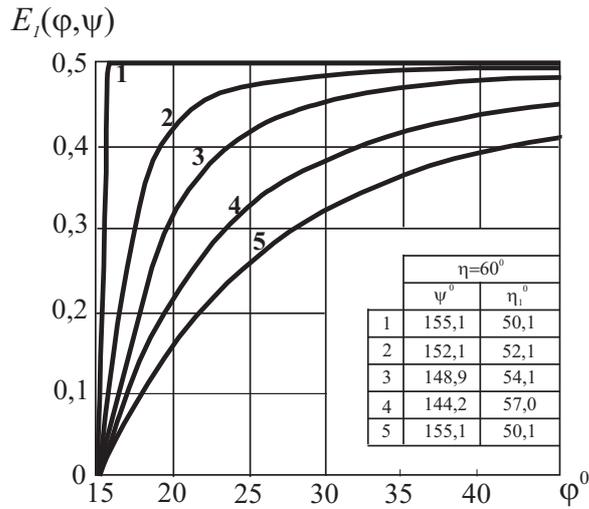


Рисунок 2.11 — Распределение деформаций  $E_1(\varphi, \psi)$  в окрестности центра веера характеристик для случая  $\eta = 60^\circ$

Анализ распределения деформаций в пластической области показывает, что согласно условию (2.12) минимальные деформации достигаются при угле  $\psi$ , при котором новая деформированная поверхность образуется под углом  $\eta_1 = \eta$ , то есть геометрия V-образного выреза в процессе деформирования

полосы сохраняет симметрию. На рисунке 2.11 представлены изменения первого главного значения  $E_1$  тензора Альманси для различных значений угла  $\psi$ , задающего движение угловой точки выреза при  $\eta = 60^\circ$ . Из графиков видно, что наибольшие значения деформация достигает на границе веера при  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , то есть на линии разрыва  $AE$ . Условие (2.12) выполняется при значении  $\psi = 79,1^\circ$ , при этом новая часть поверхности  $AC$  образуется под углом  $\eta_1 = 60^\circ$ , то есть геометрия выреза сохраняется. На рисунке 2.12 показаны возможные положения новой деформированной поверхности  $V$ -образного выреза при несимметричном пластическом течении для случая  $\eta = 60^\circ$ .

Отметим, что при растяжении полосы в процессе пластического течения частицы материала в окрестности точки  $A$  перемещаются из области  $AFG$  в нижнюю часть полосы за жёсткопластическую границу  $AE$ , являющейся линией разрыва поля скоростей перемещений. Поэтому процесс накопления диссипации состоит из двух этапов: первый — деформирование в веере  $EAF$ , второй — на линии разрыва скоростей  $AE$ .

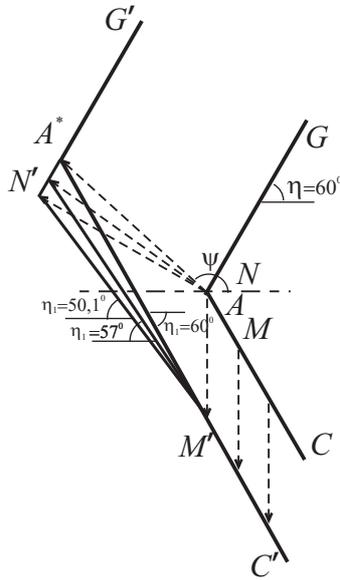


Рисунок 2.12 — Возможные положения новой деформированной поверхности для случая  $\eta = 60^\circ$

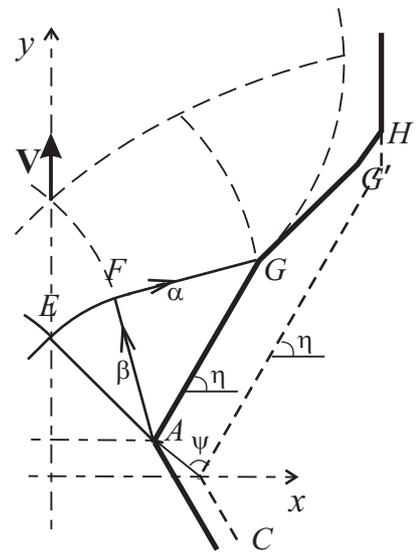


Рисунок 2.13 — Изменение геометрии при несимметричном пластическом течении для случая  $\eta = 60^\circ$

Расчёты показывают, что при уменьшении  $\eta$  точка  $A^*$  приближается к точке  $N'$  (см. рисунок 2.10) и при  $\eta = 52,362^\circ$  совмещается с ней. При этом  $\sup E_1 \rightarrow 0,5$ . Из чего следует, что при  $\eta \leq 52,362^\circ$  пластическое течение полосы возможно лишь при разрушении материала в окрестности вершины выреза, то есть возможно «превращение» выреза в трещину.

Значение  $\eta = 52,362^\circ$  является решением уравнения  $d = 0$ , где  $d$  — расстояние между двумя достаточно близкими частицами, примыкающих к вершине выреза сверху и снизу, при их движении в процессе деформирования полосы:

$$d = Vt |\cos(2\eta) + 2 \cos \eta - \sin(2\eta)|.$$

Далее рассмотрим геометрию несимметричного пластического течения в процессе деформирования для случая  $\eta > 52,362^\circ$ . На рисунке 2.13 представлена схема развития пластического течения при растяжении полосы с  $V$ -образными вырезами для случая  $\eta = 60^\circ$ , когда в пластическом состоянии находится только верхняя полуплоскость. В виду симметрии этой полуплоскости на рисунке рассматривается её правая часть. Функции, описывающие части вновь образованной свободной поверхности  $CAGG'H$ , имеют вид

$$\begin{aligned} AC : \quad & y - y_{A-} = -\operatorname{tg} \eta (x - x_A); \\ AG : \quad & y - y_{A-} = \operatorname{tg} \eta (x - x_A); \\ GG' : \quad & y - y_{G-} = k(x - x_G), \quad k = \frac{y_{G'} - y_G}{x_{G'} - x_G}; \\ G'H : \quad & y - y_{G'} = \operatorname{tg} \eta (x - x_{G'}); \end{aligned}$$

где положение точек пластической области определяются координатами:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A^0 + a't, \quad y_A = b't; \\ x_G &= (x_A^0 + a't)(1 + 2 \cos \eta), \quad y_G = b't + 2(x_A^0 + a't) \sin \eta; \\ x_{G'} &= x_A^0 + (1 + 2 \cos \eta)t, \quad y_{G'} = b't + 2x_A^0 \sin \eta. \end{aligned}$$

Уравнения линий разрыва поля скоростей перемещений имеют вид

$$\begin{aligned}
 AE : \quad & \frac{y + x - x_A^0}{a' + b'} = t; \\
 EF : \quad & \begin{cases} x = x_A + R \cos \xi, \\ y = y_A + R \sin \xi, \end{cases} \quad R = \sqrt{2}x_A, \quad \xi = \frac{\pi}{2} + \varphi; \\
 FG : \quad & \frac{y(\cos \eta + \sin \eta) + x(\cos \eta - \sin \eta) + x_A^0(2 + \cos \eta - \sin \eta)}{a'(2 + \cos \eta - \sin \eta) + b'(\cos \eta + \sin \eta)} = t.
 \end{aligned}$$

Нормальные скорости движения этих линий согласно (1.12) равны

$$\begin{aligned}
 G_{AE} &= \frac{a' + b'}{\sqrt{2}}; \\
 G_{EF} &= a'(\cos \xi + \sqrt{2}) + b' \sin \xi, \quad \xi \in \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \eta \right]; \\
 G_{FG} &= \frac{a'(2 + \cos \eta - \sin \eta) + b'(\cos \eta + \sin \eta)}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Учитывая (2.9), (2.10), разрыв касательной составляющей и нормальная составляющая скорости частиц на линиях разрыва имеют вид

$$\begin{aligned}
 AE \quad & [V_\tau] = \sqrt{2}, \quad V_\nu = -\frac{1}{2}; \\
 EFG : \quad & [V_\tau] = -\sqrt{2}, \quad V_\nu = \frac{1}{2}(\cos \eta + \sin \eta).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Соотношения (2.13), (2.14) позволяют определить удельную диссипацию энергии на линиях разрыва  $AE$ ,  $AFG$  поля скоростей перемещений, которая даёт распределение деформаций на этих же линиях. Отметим, что вдоль этих линий деформации являются постоянными. При этом точка  $E$  является точкой пересечения линий разрыва, а соответственно и точкой разрыва деформаций, то есть в её окрестности наблюдается «скачок» деформаций. Как отмечалось выше, в начальный момент времени в веер попадает недеформированная частица, то есть начальные деформации равны нулю. При прохождении частицей веера в окрестности точки  $A$  деформации возрастают и далее происходит «скачок» на линии  $AE$ .

Отметим, что на основе рассматриваемого в данном разделе несимметричного течения может быть предложено решение, когда в пластическом состоянии находятся попеременно обе полуплоскости полосы — так называемое симметричное решение [9]. Как было показано выше, в процессе деформирования  $V$ -образный вырез в полосе сохраняет свою симметрию относительно первоначального положения свободной поверхности при условии  $\eta_1 = \eta$ . При этом в пластическом состоянии в последующие моменты времени может находиться как верхняя, так и нижняя полуплоскость полосы, что приводит к неоднозначности пластического течения. Допуская, что в момент времени  $t \in [0, \Delta t_1]$  вектор  $\mathbf{m}$  был направлен в верхнюю полуплоскость полосы, то в следующий момент  $t \in [\Delta t_1, \Delta t_2]$  пластическая зона может располагаться в нижней полуплоскости полосы, и вектор  $\mathbf{m}$ , определяющий направление движения угловой точки, будет направлен вниз. В этом случае движение точки  $A$  будет зигзагообразным, и первоначальная геометрия  $V$ -образного выреза так же сохраняется.

## 2.4 Схема деформирования и разрушения плоского образца

В работе [161] рассматривается полная схема деформирования и разрушения плоского образца (рисунок 2.14), позволяющая представить процесс разрушения составным, и сформулировать используемые в работе критерии разрушения. Аналогичная схема в предельном случае имеет место и для цилиндрического образца.

Процесс разрушения материала предлагается рассматривать состоящим из двух этапов. На первом этапе происходит однородное деформирование образца; при достижении некоторого критического значения диссипации энергии  $W_{**}$ , которая вложена в каждую частицу, происходит зарождение конеч-

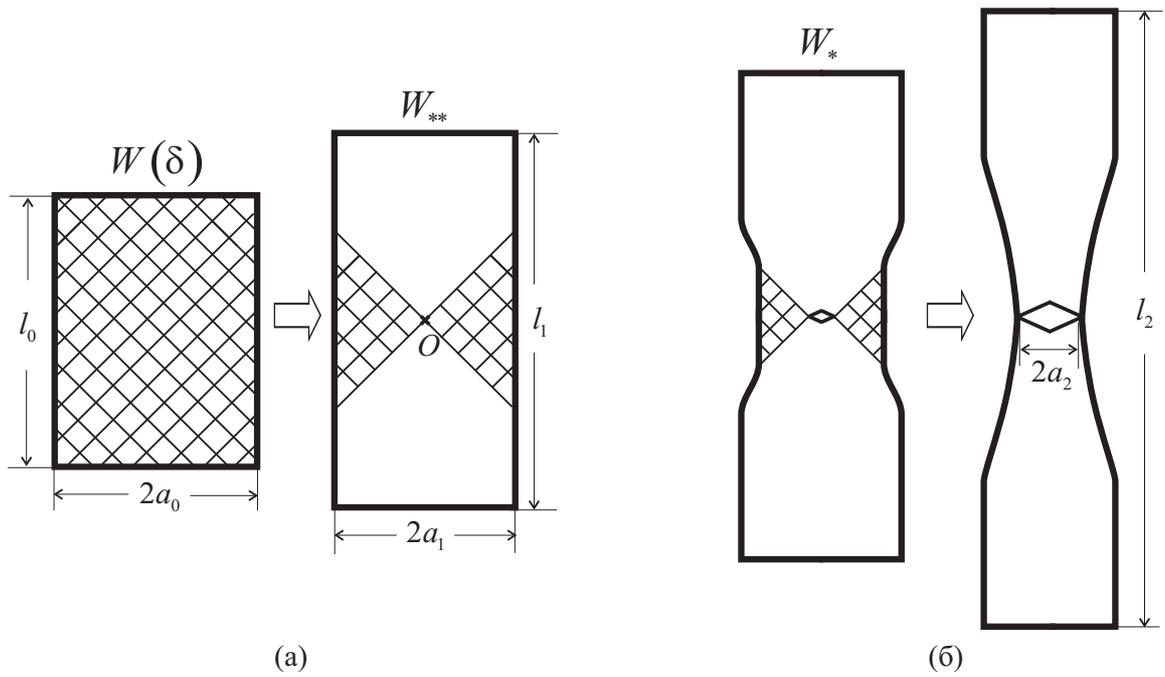


Рисунок 2.14 — Схема деформирования и разрушения плоского образца:

I этап (а) — доведение материала до предельного состояния (зарождение трещины,  $W_{**}$ );  
 II этап (б) — образование новых свободных поверхностей (распространение трещины,  $W_*$ )

ной макротрещины (рисунок 2.14, (а)). На втором этапе реализуется решение с разрывным полем скоростей перемещения (обобщение решения Оната-Прагера [205]); для дальнейшего развития трещины (вплоть до разделения образца на две части) необходимо добавить некоторое значение энергии  $W_*$ .

Отметим, что рассматриваемая составная схема разрушения образца имеет подтверждение численными исследованиями, представленных в работах [75, 77], где также отмечается «многостадийный характер развития повреждений в материале в процессе его деформирования»: первая стадия характеризуется зарождением трещины и развитием микродефектов до образования макроскопического дефекта; на второй стадии происходит слияние образовавшихся дефектов в одну или несколько магистральных трещин. В работе [50] предлагается объединённая модель накопления усталостных повреждений на основе деформационного разрыхления, включающая в себя две стадии разру-

шения — образования и роста усталостной трещины. При этом первая стадия разрушения описывается на основе расчётных моделей много- и малоцикло-вой усталости, а описание роста усталостной трещины проводится в рамках расчётных моделей механики разрушения.

На основе предлагаемой схемы деформирования и разрушения образца (см. рисунок 2.14) формулируются используемые в работе критерии разрушения. В качестве критериальной величины принимается удельная работа внутренних сил на пластических деформациях.

### 2.4.1 Критерии зарождения и распространения трещин

Выбор удельной работы внутренних сил (удельной диссипации энергии) в качестве критериальной величины, характеризующей этапы процесса разрушения, обосновано тем, что именно диссипация энергии отвечает за термодинамическую необратимость процесса разрушения.

**Критерий зарождения трещины:** *Зарождение трещины происходит, когда работа внутренних сил на пластических деформациях достигает критической величины*

$$W = W_{**}, \quad (2.15)$$

где  $W_{**}$  — удельная работа внутренних сил на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала.

**Критерий распространения трещины:** *Распространение трещины происходит, когда работа внутренних сил на пластических деформациях достигает критической величины*

$$W = W_*. \quad (2.16)$$

Здесь  $W_*$  — удельная работа внутренних сил, которую необходимо «добавить» в материал для распространения трещины.

Очевидно, что при монотонном нагружении критерии (2.15), (2.16) следуют друг из друга, что не верно при циклическом нагружении.

Отметим, что реализация рассматриваемого в работе [161] алгоритма определения критических значений удельной диссипации энергии ( $W_{**}$ ,  $W_*$ ) является достаточно трудоёмкой, поскольку для их определения необходимо проводить измерения размеров образца после первого этапа деформирования (то есть до образования «шейки»). При этом исходными данными для расчёта являются механические характеристики разрушения материала: ( $\delta$  — относительное удлинение образца и  $\psi$  — относительное сужение образца при разрушении); а также размеры образца в течение всего процесса:  $a_0$ ,  $l_0$ ,  $a_1$ ,  $l_1$ ,  $a_2$ ,  $l_2$  — начальные, промежуточные и конечные значения длины и ширины образца. Кроме того, данный алгоритм расчёта критических значений диссипации энергии может быть использован только в случае, когда перед разрушением материала в образце наблюдается чётко выраженная «шейка». В работе [15] предложена упрощённая схема пластического течения при растяжении цилиндрического образца с начальной трещиной, основанная на аппроксимации подвижной свободной поверхности поверхностью прямого кругового цилиндра, что позволяет получить конечные соотношения, связывающие относительное сужение образца при разрушении и удельную диссипацию энергии, необходимую для разрушения образца.

Отметим, что большинство работ как российских, так и зарубежных авторов, посвящено экспериментальным исследованиям и численному моделированию процессов разрушения различных материалов, в том числе при описании моментов зарождения трещины и её распространения, [49, 51, 62, 75, 77, 88, 89, 149, 183, 200, 204, 209, и др.]. В настоящей работе рассматриваются методы определения критических значений диссипации энергии, характеризующих этапы деформирования и разрушения образца, основанные на соотношениях теории малоциклового усталости (см. главу 4), и при использовании

экспериментально определяемого значения инвариантного  $J$ -интеграла (см. главу 5). Процесс зарождения трещины (доведение материала до предельного состояния) предлагается описывать на основе упрочняющегося жёсткопластического тела. Процесс распространения трещины — на основе идеального жёсткопластического тела, при условии, что материал практически достиг предельного состояния.

## **2.5 Поведение материальных частиц на пересечениях особенностей поля скоростей перемещений**

В предыдущих разделах были рассмотрены задачи, позволяющие моделировать процессы деформирования и разрушения материала в условиях плоской деформации. Исследование поведения частиц материала и распределения деформаций в пластических областях позволяет предположить возможное поведение материала в окрестности пересечения особенностей поля скоростей перемещений, прогнозируя тем самым зоны, «опасные» для разрушения. Положение этих зон связано с точками пластической области, где нарушается условие непрерывности отображения конфигурации частиц в пластической области, когда две бесконечно близкие частицы расходятся на конечное расстояние. Пересечение особенностей может наблюдаться как в окрестности свободной поверхности, так и внутри пластической области. На рисунке 2.15 показаны некоторые возможные схемы движения материальных частиц в окрестности пересечения особенностей: пересечение линий разрыва поля скоростей перемещений; совпадение двух центров вееров линий скольжения в одной точке.

Для рассмотренных в настоящей главе задач зоны, «опасные» для разрушения, наблюдаются в окрестности следующих точек пластической области:

- внутри пластической области на пересечениях линий разрыва поля

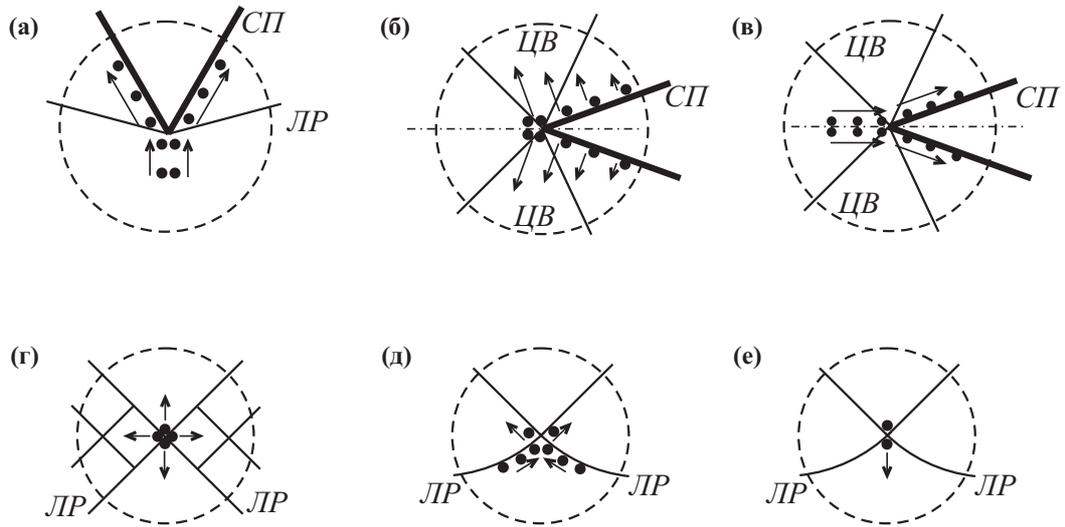


Рисунок 2.15 — Схемы поведения частиц материала в окрестности пересечения особенностей поля скоростей перемещений: (а)–(в) — в окрестности свободной поверхности (СП); (г)–(е) — внутри пластической области; (а), (г)–(е) — пересечения линий разрыва (ЛР) поля скоростей перемещений; (б), (в) — совпадение в одной точке двух центров вееров (ЦВ) линий скольжения

скоростей перемещений: точка  $D$  — в решениях Прандтля для задач о раздавливании острого и усечённого клиньев гладким плоским штампом (см. рисунки 2.3, (б); 2.5, (б)); в задаче о растяжении полосы с  $V$ -образными вырезами — точка  $O$  в обобщённом решении Хилла (рисунок 2.6, (а)), точки  $B$  и  $E$  в обобщённом решении Прандтля (рисунок 2.6, (б)) и при несимметричном пластическом течении (рисунок 2.9); точка  $O$  — в однородном поле деформирования (рисунок 2.14, (а));

– в окрестности свободных поверхностей: точка  $B$  — в задаче о внедрении клина (рисунок 2.1); точка  $A$  — во всех симметричных решениях задачи о растяжении полосы с  $V$ -образными вырезами (см. рисунки 2.6, 2.7).

Из приведённых рассуждений и схем следует, что в теории пластического течения заложена модель разрушения, учитывающая изменение тензоров конечных деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений (на линиях разрыва, в окрестности центра веера линий скольжений и т.

д.), согласно теории Адамара-Томаса, [150, 156, 172].

## 2.6 Выводы ко второй главе

Рассмотрены задачи, позволяющие моделировать процессы деформирования и разрушения при неустановившемся и установившемся пластическом течении: внедрение клина в жёсткопластическую полуплоскость; раздавливание острого и усечённого клиньев гладким плоским штампом; растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами. На основе анализа скоростей перемещений частиц в пластической области и распределения деформаций сделаны выводы о возможности рассмотрения предлагаемых в задачах пластических течений с разрушением и без него. Отмечены наиболее «опасные» зоны для разрушения материала. В случае неединственности пластического течения осуществлён выбор предпочтительного решения на основе используемого в работе критерия.

Предложен механизм образования трещин в точках нарушения условия непрерывности отображения конфигурации частиц в пластической области, когда две особенности поля скоростей перемещений пересекаются или совпадают в одной точке.

Процесс разрушения материала предложено рассматривать состоящим из двух этапов: однородного деформирования образца до момента зарождения макротрещины и решения с разрывным полем скоростей перемещений. Сформулированы критерии разрушения материала: доведения до предельного состояния (зарождение трещины) и образования новых свободных поверхностей (распространение трещины). В качестве критериальной величины выбрана удельная работа внутренних сил, что обосновывается её связью с термодинамической необратимостью процесса разрушения. Предложено процесс зарождения трещины описывать на основе упрочняющегося жёсткопла-

стического тела; процесс распространения трещины — на основе идеального жёсткопластического тела, при условии, что материал практически достиг предельного состояния.

## Глава 3

# Поверхность нагружения, условие пластичности и энергетическое условие развития пластического течения

Понятие «поверхности пластичности» вводится, как поверхность, точки которой «соответствуют пределам упругости или пластичности» [47, 74]. В случае, когда данная поверхность фиксирована (для идеально пластических сред), она является поверхностью текучести. Для упрочняющихся материалов эта поверхность может изменяться при изменении напряжённого состояния и в этом случае вводятся понятия «поверхности упрочнения» или «поверхности нагружения». При этом отмечается, что «...термин упрочняющееся пластическое тело используется для определения пластических сред, поверхность нагружения которых изменяется в процессе изменения деформированного состояния ...»; и предполагается, что функция нагружения, определяющая уравнение поверхности нагружения, является функцией компонент тензора напряжения  $\sigma_{ij}$ , компонент пластической деформации  $e_{ij}^p$ , параметров упрочнения  $\chi_i$  и констант материала  $k_i$ :

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i, k_i) = 0.$$

В общем случае уравнение поверхности пластичности определяется в виде [47, 58, 79, 108, 124, 128, 155, и др.]

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K \quad \text{или} \quad f(II_{D_\sigma}, III_{D_\sigma}) = K,$$

где  $\sigma_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) — главные значения тензора напряжения,  $II_{D_\sigma}$ ,  $III_{D_\sigma}$  — второй и третий инварианты девиатора напряжения,  $K$  — константа материала,

связанная с пределом текучести. Проекции поверхности пластичности на девиаторной плоскости определяют условие пластичности (текучести).

Классическими среди критериев пластичности считаются критерии Мизеса и Треска, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментальными данными для пластичных материалов с равными пределами текучести при растяжении и сжатии. Эти условия выражаются следующими поверхностями [79, 155]:

– круговым цилиндром в условии Мизеса:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_S^2; \quad (3.1)$$

– шестигранной призмой в условии Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S \quad \text{или} \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_S \quad \text{или} \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_S; \quad (3.2)$$

где  $\sigma_S$  – предел текучести при одноосном растяжении цилиндрического образца.

В работах Е. В. Ломакина [94–96] условие пластичности рассматривается в обобщенном виде, зависящем от параметра вида напряжённого состояния, характеризующего в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды. Работы Ю. Н. Радаева [82, 83, 133–137] посвящены гиперболическим трёхмерным уравнениям математической теории пластичности на основе условия пластичности Треска и обобщённого ассоциированного закона течения для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска. В работах С. Е. Александрова и Р. В. Гольдштейна [2, 3] используется условие пластичности для упрочняющегося жёсткопластического материала в рамках плоской деформации, содержащее произвольную функцию накопленной деформации. В работах [4, 98] исследуется влияние поправочных функций на пластические решения в рамках градиентной теории пластичности, объектами исследования которой являются

ся конструкции с концентраторами напряжений, процессы деформирования при малых упругопластических деформациях или при обработке материалов давлением, а также вблизи поверхностей трения при неоднородных свойствах материала.

Однако, ещё в работе Б. Поля [129] отмечается, что условие изотропии не требует, чтобы пределы текучести на растяжение и сжатие материала были одинаковыми: «для металлов, у которых нет чёткой точки текучести, ..., обычно имеется различие между пределами текучести на растяжение и сжатие, связанное с эффектом Баушингера», [129, стр. 358]. Следствием этого является тройная симметрия кривой текучести в девиаторной плоскости: кривая имеет вид криволинейного треугольника, при этом учитывается различие между пределами текучести на растяжение и сжатие.

В работах И. И. Гольденבלата, В. А. Копнова [58], Г. С. Писаренко, А. А. Лебедева [125], Г. А. Гениева, В. Н. Киссюка [54], Н. И. Карпенко, В. М. Круглова, Л. Ю. Соловьёва [78, 147] вводятся в рассмотрение предельные поверхности, имеющие в сечениях девиаторной плоскостью вид замкнутого криволинейного треугольника в тремя осями симметрии в пространстве главных напряжений, и достаточно хорошо совпадающие с экспериментальными данными для определённых материалов. Критерий предельного состояния в работе [125] рассматривается как совмещение условий пластичности и разрушения; при этом параметр, характеризующий степень ответственности за микроразрушение сдвиговой деформации, определяется отношением пределов текучести на растяжение и сжатие. Здесь же отмечается, что «предельная поверхность ... должна представлять собой равнонаклонённую к главным осям пространственную фигуру, имеющую в сечении, перпендикулярном к её оси, не окружность (поверхности вращения), а более сложную замкнутую кривую, инвариантную к направлениям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ». Коэффициенты, входящие в обобщённое условие в [54], выражаются через константы материала, опре-

деляемые при растяжении, сжатии и чистом сдвиге; и обобщение связано с введением в условие третьего инварианта девиатора напряжений. В работах [78, 147] решения строятся на основе теории пластического течения при предположении его неассоциированности. В работах В. М. Марченко [100–102] предлагается поверхность нагружения в рамках теории пластического течения, в которой законы течения не являются ассоциированными, но при этом учитывается эффект Баушингера. Отмечается, что из экспериментальных работ по определению поверхностей нагружения следует отличие формы поверхности нагружения от круговой при ненулевом параметре упрочнения (меры пластических деформаций).

В настоящей работе рассматривается условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела, и проводится его сравнение в условиях плоской и осесимметричной деформациях, плоского напряжённого состояния с традиционно используемыми критериями Мизеса и Треска. На девиаторной плоскости условие определяется замкнутым криволинейным треугольником, вид которого отмечается в работах [54, 58, 125, 147, 178, 196–198, 201, 210]. Коэффициенты, характеризующие напряжённое состояние материала и оказывающие влияние на вид кривой текучести, связаны с первым инвариантом тензора конечных деформаций Альманси (модуль которого выбран за параметр упрочнения), относительным удлинением и пределом текучести материала (определяемых из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца).

### 3.1 Поверхность деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела и уравнение линий уровня

Известно, что «...деформированное состояние тела является неравномерным и изменяется от точки к точке. При этом деформированное состояние в точке тела полностью определяется шестью компонентами деформаций: тремя относительными линейными деформациями,... и тремя относительными угловыми деформациями...», [128].

Впервые поверхность деформационных состояний для несжимаемого жёсткопластического тела в виде гиперболической поверхности третьего порядка в пространстве главных деформаций была предложена А. И. Хромовым [92, 173, 174]. Развитие деформационно-энергетического подхода, связанного с формулировкой условия пластичности (условия предельного состояния жёсткопластических тел), рассматривается в работах [11–13, 29, 91]. Математически уравнение этой поверхности определяется условием несжимаемости жёсткопластического тела:

- в компонентах тензора скорости деформации

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

- в компонентах тензора конечных деформаций Коши

$$C_1 C_2 C_3 = 1,$$

- в компонентах тензора конечных деформаций Альманси

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \quad (3.3)$$

На рисунке 3.1, (а) представлена поверхность деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела в пространстве главных значений тензора конечных деформаций Альманси.

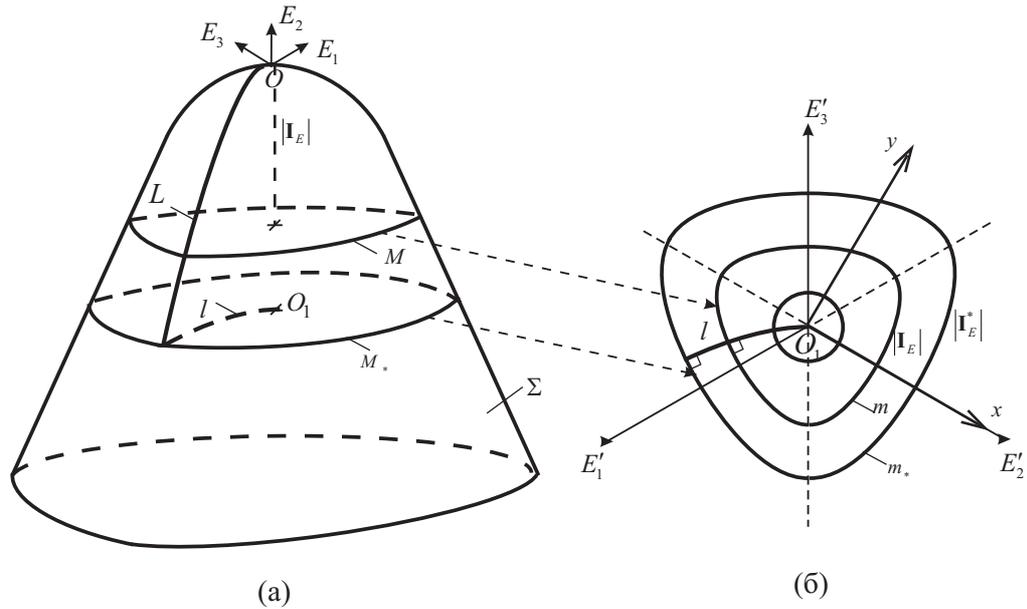


Рисунок 3.1 — Поверхность деформационных состояний  $\Sigma$  (а) и линии уровня (б)

Все деформационные процессы описываются линиями  $L$  на этой поверхности или их проекциями  $l$  на девиаторной плоскости. Вид линий на поверхности зависит от истории нагружения. В частности ортогональным линиям будет соответствовать одноосное деформирование цилиндрического образца. Данная поверхность является выпуклой, гладкой и обладает тремя осями симметрии в рассматриваемом пространстве главных деформаций.

В сечениях плоскостями, параллельными девиаторной плоскости

$$E_1 + E_2 + E_3 = const.,$$

поверхность  $\Sigma$  принимает вид замкнутого криволинейного треугольника с тремя осями симметрии (рисунок 3.1, (б)). Далее в работе эти проекции поверхности  $\Sigma$  называются «линиями уровня». На рисунке величины со штрихами ( $E'_1$ ,  $E'_2$ ,  $E'_3$ ) обозначают проекции соответствующих осей ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ) на девиаторную плоскость.

Согласно основным экспериментам на одноосное растяжение образцов

наличие больших пластических деформаций, как правило, приводит к разрушению материала. Поэтому предельное состояние материала на поверхности  $\Sigma$  деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела должно определяться некоторой замкнутой линией. Учитывая геометрический характер линий уровня и предположения в [54, 124, 128], далее в работе предлагается кривые текучести связывать именно с линиями уровня поверхности  $\Sigma$  (см. раздел 3.2).

Форма линий уровня (а далее в работе и кривой текучести) изменяется следующим образом: при приближении к недеформированному состоянию, она стремится к окружности (далее по аналогии с условием пластичности Мизеса); при удалении от этой точки она принимает всё более треугольно-образную форму, которая в пределе стремится к треугольнику (по аналогии с линией, которая рассматривается в [124, 125], и представляет собой «...треугольник, соответствующий теории максимальных нормальных напряжений»). Переход с одной линии уровня на другую происходит при одной и той же мощности работы внутренних сил для всех ортогональных процессов деформирования, которая совпадает с удельной мощностью работы внутренних сил при одноосном растяжении цилиндрического образца. На отдельной (фиксированной) линии уровня, характеризуемой определённым значением параметра  $|I_E|$ , может быть поставлена задача идеальной пластичности. То есть при рассмотрении задач деформирования упрочняющегося жёсткопластического тела на каждом уровне деформаций для определения компонент тензора скорости деформации  $\varepsilon_{ij}$  может быть поставлена задача теории идеальной пластичности при заданном параметре  $|I_E|$ , характеризующем положение поверхности нагружения.

Запишем уравнение линий уровня в компонентах тензора конечных деформаций Альманси. В работах [12, 13, 91, 92, 173, 174] уравнение представлено в виде системы уравнений, определяющих геометрически пересечение

двух поверхностей: поверхности деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела и плоскости, параллельной девиаторной. При этом система записывается в главных значениях тензора деформаций Коши  $\mathbf{C}$ . Поскольку в работе в качестве меры деформации выбран тензор конечных деформаций Альманси  $\mathbf{E}$ , запишем аналогичную систему уравнений в главных значениях этого тензора [165]:

$$\begin{cases} (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1, \\ E_1 + E_2 + E_3 = I_E, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $I_E$  — первый инвариант тензора конечных деформаций Альманси, характеризующий уровень деформаций относительно поверхности  $\Sigma$ . Аналогично [13, 91, 92, 173, 174] для определения уравнений линий уровня в девиаторной плоскости введем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}(2E_1 - E_2 - E_3), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_2 - E_3), \\ I_E = E_1 + E_2 + E_3, \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $x, y$  — координаты на девиаторной плоскости (декартовы координаты). Отметим, что при таком выборе координат, проекция направления  $E_1$  совпадает с направлением оси  $x$ . Выражая из последней системы главные значения тензора Альманси:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{3}I_E + \frac{2}{\sqrt{6}}x, \\ E_2 = \frac{1}{3}I_E - \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, \\ E_3 = \frac{1}{3}I_E - \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \end{cases}$$

и подставляя их в условие несжимаемости (3.3), получим уравнение линий уровня в девиаторной плоскости:

$$(3 - 2I_E)^3 - 18(3 - 2I_E)(x^2 + y^2) - 12\sqrt{6}x(x^2 - 3y^2) = 27.$$

Подставляя в полученное уравнение координаты  $x, y$  из (3.5), получим уравнение линий уровня в главных значениях тензора Альманси:

$$\begin{aligned} & 8(2E_1 - E_2 - E_3)(2E_2 - E_3 - E_1)(2E_3 - E_1 - E_2) + \\ & + 6(3 - 2I_E) [(E_1 - E_2)^2 + (E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2] = \\ & = (3 - 2I_E)^3 - 27. \end{aligned}$$

Отметим, что данное уравнение является симметричным относительно любой перестановки главных значений тензора деформаций, то есть при составлении систем уравнений, аналогичных (3.5), для случаев совпадения с осью  $x$  проекций направлений второго  $E_2$  или третьего  $E_3$  главных значений тензора Альманси приходим к аналогичному результату.

Известно [79], что второй и третий инварианты девиатора деформаций определяются через главные значения соответствующего тензора в виде

$$\begin{aligned} II_{D_E} &= \frac{1}{6} [(E_1 - E_2)^2 + (E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2], \\ III_{D_E} &= \frac{1}{27} (2E_1 - E_2 - E_3)(2E_2 - E_3 - E_1)(2E_3 - E_1 - E_2). \end{aligned}$$

Тогда уравнение линий уровня в инвариантах девиатора для тензора конечных деформаций Альманси принимает следующий вид

$$6III_{D_E} + (3 - 2I_E)II_{D_E} = \frac{1}{36} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \quad (3.6)$$

В полученное уравнение входит первый инвариант  $I_E$  тензора Альманси, модуль которого характеризует уровень деформаций относительно поверхности  $\Sigma$  деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела, и в дальнейшем выбирается за параметр упрочнения материала (см. раздел 4.2).

## 3.2 Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформационных состояний

Как было отмечено в разделе 3.1, кривые текучести предлагается связать с линиями уровня поверхности деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела.

Для того, чтобы связать поверхность деформационных состояний  $\Sigma$  и поверхность нагружения вводится коэффициент пропорциональности между девиаторами для тензоров напряжения и конечных деформаций Альманси:

$$D_\sigma = h_E D_E, \quad (3.7)$$

откуда следует связь между инвариантами рассматриваемых девиаторов:

$$II_{D_\sigma} = h_E^2 II_{D_E}, \quad III_{D_\sigma} = h_E^3 III_{D_E}. \quad (3.8)$$

Отметим, что из пропорциональности девиаторов (3.7) следует пропорциональность компонент тензоров напряжения и конечных деформаций Альманси. Действительно,

$$s_{ij} = h_E d_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad d_{ij} = E_{ij} - \delta_{ij} d;$$

тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma &= h_E (E_{ij} - \delta_{ij} d), \\ \sigma_{ij} &= h_E E_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} (I_\Sigma - h_E I_E); \end{aligned}$$

откуда очевидно, что

$$\sigma_{ij} = h_E E_{ij}, \quad \text{когда} \quad I_\Sigma = h_E I_E.$$

Здесь  $\sigma = \frac{1}{3} I_\Sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ ,  $d = \frac{1}{3} I_E = \frac{1}{3} (E_{11} + E_{22} + E_{33})$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Заметим, что соотношение (3.7) может трактоваться с двух позиций:

1) представляет собой основное соотношение деформационной теории пластичности («девиаторы деформаций и напряжений пропорциональны», [79]), и позволяет построить деформационную пластичность, с тем отличием, что упругими деформациями пренебрегаем;

2) вводится для определения коэффициента подобия между линиями уровня поверхности деформационных состояний и условием пластичности в пространстве главных напряжений (вид поверхности нагружения рассматривается ниже); добавляя ассоциированный закон пластического течения позволяет построить теорию пластического течения.

Учитывая геометрический характер линий уровня и отмеченный в работах [54, 58, 125, 147, 178, 196–198, 201, 210] вид кривой текучести, дальнейшие положения в работе основаны на второй позиции.

Согласно (3.8) из (3.6) получаем уравнение поверхности нагружения в инвариантах девиатора напряжения:

$$6III_{D_\sigma} + h_E(3 - 2I_E)II_{D_\sigma} = \frac{h_E^3}{36} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \quad (3.9)$$

Инварианты девиатора напряжения определяются через главные значения тензора напряжений в виде [79]:

$$II_{D_\sigma} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

$$III_{D_\sigma} = \frac{1}{27}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2).$$

Тогда согласно (3.9) уравнение поверхности нагружения для упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела в главных значениях тензора напряжения принимает вид

$$\begin{aligned} & (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) + \\ & + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ & = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим, что в полученном соотношении величина  $I_E$  характеризует уровень деформаций относительно поверхности деформационных состояний. Согласно [58] «предельная поверхность изотропного тела должна быть инвариантом полной ортогональной группы в трёхмерном физическом пространстве...», то есть «...при любых поворотах или отражениях системы координат в физическом пространстве предельная поверхность в пространстве главных напряжений должна оставаться неизменной». Поверхность (3.10) представляет собой цилиндрическую поверхность, проекции которой на девиаторной плоскости имеют вид замкнутого криволинейного треугольника с тремя осями симметрии, и удовлетворяет указанным требованиям: является выпуклой, гладкой и симметричной.

Для определение коэффициента пропорциональности  $h_E$  предлагается перестроить диаграмму нагружения: предполагается использование гипотезы единой кривой, но построенной не в традиционных координатах интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига, а в координатах предела текучести  $\sigma_S$  и модуля первого инварианта тензора конечных деформаций Альманси  $|I_E|$ . При этом используется связь между  $I_E$  и относительным удлинением образца  $\delta$  при одноосном растяжении согласно (1.29):

$$I_E(\delta) = E_1(\delta) + E_2(\delta) + E_3(\delta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta(2+\delta)}{(1+\delta)^2} - 2\delta \right] = -\frac{\delta^2(3+2\delta)}{2(1+\delta)^2} < 0. \quad (3.11)$$

Коэффициент  $h_E$  предлагается определять из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца, когда  $\sigma_1 = \sigma_S$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Согласно (3.7), (1.29) и (3.11):

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_S & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_S & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_S \end{pmatrix} = h_E \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left[ \frac{\delta(2+\delta)}{(1+\delta)^2} + \delta \right] & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \left[ \frac{\delta(2+\delta)}{(1+\delta)^2} + \delta \right] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \left[ \frac{\delta(2+\delta)}{(1+\delta)^2} + \delta \right] \end{pmatrix},$$

откуда получаем

$$h_E(\delta) = \frac{2\sigma_S(\delta)}{3E_1(\delta) - I_E(\delta)} = \frac{2(1 + \delta)^2}{\delta(\delta^2 + 3\delta + 3)}\sigma_S(\delta) > 0. \quad (3.12)$$

### 3.3 Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, при различных условиях деформирования

Свяжем условие пластичности (текучести) с проекциями поверхности нагружения (3.10) на плоскости, параллельные девиаторной. Геометрически это условие пластичности представляет собой криволинейный треугольник с тремя осями симметрии в девиаторной плоскости пространства главных напряжений и в общем виде может быть представлено соотношением

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K \quad \text{или} \quad f(II_{D_\sigma}, III_{D_\sigma}) = K,$$

где  $K$  — некоторая константа, характеризующая состояние материала;  $II_\Sigma$ ,  $III_\Sigma$  — второй и третий инварианты девиатора напряжения. Согласно (3.10) условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела, в главных значениях тензора напряжения имеет вид:

$$\begin{aligned} & (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) + \\ & + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \quad (3.13) \\ & = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27], \end{aligned}$$

где  $h_E$  и  $I_E$  определяются из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца согласно (3.12) и (3.11):

$$h_E(\delta) = \frac{2(1 + \delta)^2}{\delta(\delta^2 + 3\delta + 3)}\sigma_S(\delta), \quad I_E(\delta) = -\frac{\delta^2(3 + 2\delta)}{2(1 + \delta)^2}.$$

Отметим, что линия, характеризующая условие (3.13), удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым к кривым текучести [54, 58, 79]: является гладкой, выпуклой и симметричной. Коэффициент в (3.13) перед вторым инвариантом девиатора напряжения (в левой части) и константа в правой части зависят от свойств материала: относительного удлинения  $\delta$  и предела текучести  $\sigma_S$ , что, как будет показано дальше, оказывает влияние на характер кривой текучести при выбранном условии пластичности. В работах [82, 83, 133, 135, 137] указывается, что функция текучести зависит от трёх независимых симметрических комбинаций главных нормальных напряжений, в качестве которых могут быть выбраны инварианты тензора напряжений.

На рисунке 3.2 представлено графическое сравнение кривых текучести для условий Мизеса (3.1), Треска (3.2) и условия пластичности (3.13) при фиксированном значении  $\sigma_S$ . Очевидно, что при малых значениях относительного удлинения  $\delta$  условие (3.13) практически совпадает с линией, определяющей условие Мизеса (3.1).

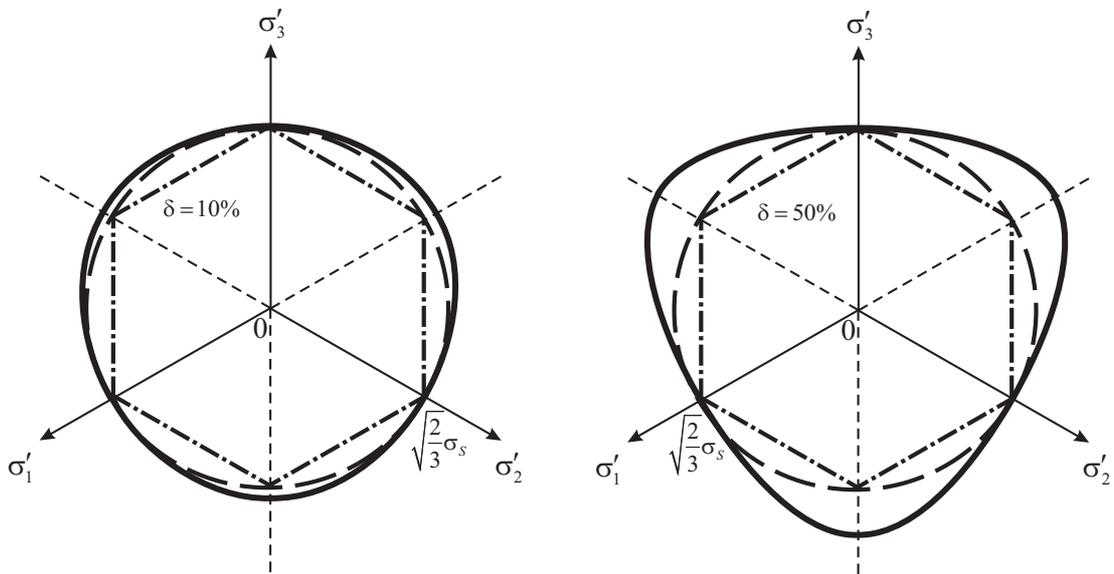


Рисунок 3.2 — Кривые текучести на девиаторной плоскости для условий (3.1) — пунктирная линия, (3.2) — штрихпунктирная линия, (3.13) — сплошная линия, при  $\delta = 10\%$  и  $\delta = 50\%$

Из рисунка 3.2 видно, что на положительных направлениях осей проекций главных напряжений линии текучести для рассматриваемых условий совпадают в точках  $\sigma'_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_S$ . Определим величины отрезков, которые отсекает на отрицательных направлениях осей  $\sigma_i$  поверхность (3.13). Для этого положим в условии (3.13)  $\sigma_1 = X$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , получим следующее кубическое уравнение:

$$X^3 + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E)X^2 - \frac{h_E^3}{16} [(3 - 2I_E)^3 - 27] = 0. \quad (3.14)$$

Выполняя замену:

$$Y = X + \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E) \quad \text{или} \quad X = Y - \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E),$$

получим приведённое кубическое уравнение:

$$Y^3 - \frac{3}{16}h_E^2(3 - 2I_E)^2Y - \frac{1}{32}h_E^3 [(3 - 2I_E)^3 - 54] = 0.$$

Учитывая, что  $I_E < 0$ ,  $h_E > 0$ , дискриминант полученного уравнения всегда отрицателен:

$$\begin{aligned} D &= \left[ \frac{-h_E^2(3 - 2I_E)^2}{16} \right]^3 + \left[ -\frac{h_E^3 [(3 - 2I_E)^3 - 54]}{64} \right]^2 = \\ &= \frac{27}{32^2}h_E^6 [27 - (3 - 2I_E)^3] < 0, \end{aligned}$$

и приведённое кубическое уравнение имеет три действительных корня:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) \cos \frac{\xi}{3}, \\ Y_2 &= \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) \cos \left( \frac{\xi + 2\pi}{3} \right), \\ Y_3 &= \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

где  $\xi = \arccos \left[ 1 - \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} \right]$ . Выполняя обратную замену, получим

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{4} h_E (3 - 2I_E) \left[ 2 \cos \frac{\xi}{3} - 1 \right], \\ X_2 &= \frac{1}{4} h_E (3 - 2I_E) \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) - 1 \right], \\ X_3 &= \frac{1}{4} h_E (3 - 2I_E) \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, линия, характеризующая условие (3.13), пересекает проекции осей главных напряжений в точках, координаты которых определяются согласно (1.29), (3.11), (3.12), (3.15) соотношениями

$$X'_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_S, \quad X'_3 = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2(\delta + 1)^3 + 1}{\delta[(3 + 2\delta)^2 + 3]} \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right) - 1 \right] \sigma_S. \quad (3.16)$$

Наличие ещё одного корня  $X_2$  объясняется существованием частей поверхности (3.13) со стороны отрицательных октантов пространства напряжений (рисунок 3.3). Эти части поверхности в дальнейшей работе не рассматриваются, поскольку согласно определению поверхности нагружения — это «...Совокупность точек, представляющих различные напряжённые состояния...», [108, с. 198]. А «...Точки, лежащие вне цилиндра (поверхность нагружения, имеющая цилиндрический характер)<sup>1</sup>, соответствуют невозможным напряжённым состояниям...», [55, с. 121]. Кроме того, очевидно, что поверхность нагружения должна охватывать начало координат [6].

Отметим, что найденные точки пересечения (3.16) соответствуют пределам текучести материала при одноосном растяжении  $\sigma_S^+$  и сжатии  $\sigma_S^-$ :

$$X'_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_S^+, \quad X'_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_S^-. \quad (3.17)$$

Очевидно, что при использовании предлагаемого условия (3.13) наблюдается различие между пределами текучести на растяжение и сжатие (то есть

---

<sup>1</sup> примечание автора

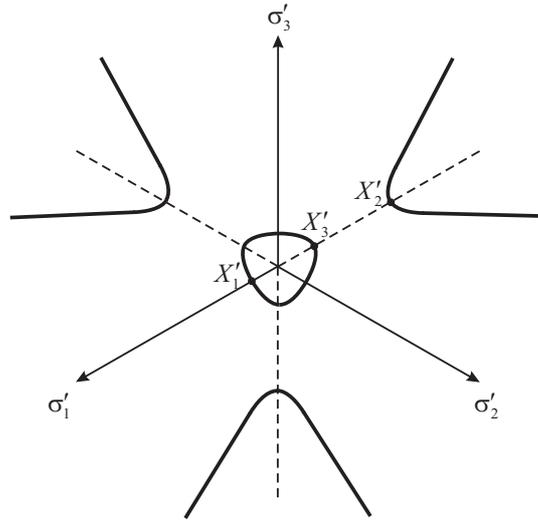


Рисунок 3.3 — Проекция предельной поверхности (3.13) на девиаторной плоскости

учитывается эффект Баушингера [129]), отношение между которыми определяется согласно (3.16) и (3.17) величиной

$$\frac{\sigma_S^+}{\sigma_S^-} = \frac{\delta [(3 + 2\delta)^2 + 3]}{2 [2(\delta + 1)^3 + 1] \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right) - 1 \right]}. \quad (3.18)$$

Из рисунка 3.2 видно, что величина  $\frac{\sigma_S^+}{\sigma_S^-}$  влияет на вид кривой текучести: при  $\sigma_S^+ = \sigma_S^-$  кривая является окружностью, при различных значениях  $\sigma_S^+$  и  $\sigma_S^-$  кривая принимает треугольнообразный вид, стремясь в пределе к треугольнику:

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\sigma_S^+}{\sigma_S^-} = \frac{1}{2}.$$

В работе [125] отмечается влияние отношения пределов текучести на растяжение и сжатие на форму предельных поверхностей. Причём этот параметр характеризует «степень участия в микроразрушении сдвиговой деформации, создающей благоприятные условия для разрыхления материала и образования трещин» (при формулировке критериев прочности).

В Приложении А рассматривается сравнение величины отношения пределов текучести на растяжение  $\sigma_S^+$  и сжатие  $\sigma_S^-$  (3.18) с экспериментальными

данными для некоторых конструкционных материалов. Результаты показывают достаточно хорошее совпадение теоретических данных с экспериментальными.

Используя ассоциированный закон пластического течения (1.2) и условие (3.13), получим главные значения тензора скорости деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \right]; \\ \varepsilon_2 &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1) \right]; \\ \varepsilon_3 &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) \right].\end{aligned}\tag{3.19}$$

Складывая главные компоненты тензора скорости деформации согласно (3.19), получим выполнение условия несжимаемости:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \lambda' \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \right) = 0.$$

Особенности применения условия (3.13) для различных процессов деформирования, реализуемых в рамках плоской и осесимметричной деформациях, плоского напряжённого состояния, рассматриваются ниже [11, 12].

### 3.3.1 Плоская деформация

При плоской деформации компоненты тензора напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю, а  $\sigma_z$  является одним из главных напряжений [79, 155]. Пусть  $\sigma_z = \sigma_3$ .

Подставляя в (3.13) выражения, связывающие компоненты тензора напряжений и его главные значения:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right], \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right], \\ \sigma_3 &= \sigma_z,\end{aligned}$$

получим условие пластичности в компонентах тензора напряжений при плоской деформации:

$$\begin{aligned}& \left[ (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)(2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x) - 9\tau_{xy}^2 \right] (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \\ & + \frac{3}{4} h_E (3 - 2I_E) \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 \right] = \quad (3.20) \\ & = \frac{h_E^3}{8} \left[ (3 - 2I_E)^3 - 27 \right].\end{aligned}$$

Дифференцируя условие (3.20) по компонентам тензора напряжений, получим соответствующие компоненты тензора скорости деформации согласно (1.2):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3\tau_{xy}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{h_E}{2} (3 - 2I_E)(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_y &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau_{xy}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{h_E}{2} (3 - 2I_E)(2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x) \right]; \quad (3.21) \\ \varepsilon_z &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 - 6\tau_{xy}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{h_E}{2} (3 - 2I_E)(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \right]; \\ \frac{1}{2}\eta_{xy} &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = 9\lambda' \tau_{xy} \left[ -(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \frac{h_E}{2} (3 - 2I_E) \right].\end{aligned}$$

Выполняя несложные преобразования компонент тензора скоростей деформации (3.21), получим, что при условии (3.20) выполняются условие несжимаемости:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0;$$

и условие соосности тензора скорости деформации и девиатора напряжения:

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\eta_{xy}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}}{2 \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{s_x - s_y}{2\tau_{xy}}.$$

Однако из (3.21) не следует пропорциональность их компонент:

$$\varepsilon_{ij} \neq \lambda' s_{ij},$$

то есть при использовании условия (3.20) не выполняются уравнения теории пластичности Сен-Венана—Мизеса [79].

Для определения третьего главного значения тензора напряжений  $\sigma_z$  используем известные из теории напряжений соотношения (1.4) в виде

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma + k \cos 2\psi, \\ \sigma_y = \sigma - k \cos 2\psi, \\ \tau_{xy} = \sigma \sin 2\psi, \end{cases} \quad (3.22)$$

где  $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ ,  $k = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ,  $\psi$  — угол между первым главным напряжением и осью  $x$ . Подставляя (3.22) в третье соотношение (3.21) при условии, что в рамках плоской деформации  $\varepsilon_z = 0$ , получим квадратное уравнение относительно  $(\sigma_z - \sigma)$ :

$$2(\sigma_z - \sigma)^2 + h_E(3 - 2I_E)(\sigma_z - \sigma) - 6k^2 = 0.$$

Дискриминант полученного уравнения всегда положителен:

$$D = h_E^2(3 - 2I_E)^2 + 48k^2 > 0.$$

Следовательно, данное квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$$(\sigma_z - \sigma)_{1,2} = \frac{-h_E(3 - 2I_E) \pm \sqrt{h_E^2(3 - 2I_E)^2 + 48k^2}}{4}. \quad (3.23)$$

Исследуем полученные значения внеплоского главного напряжения  $\sigma_z = \sigma_3$  на характер промежуточности: будут ли выполнены неравенства  $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$ . Для этого рассмотрим параметр Лоде–Надаи [108] в виде

$$\mu = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

откуда

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}\mu(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Сравнивая с (3.23), получим выражения, которые позволяют оценить величину параметра Лоде–Надаи:

$$\mu_{1,2} = \frac{-h_E(3 - 2I_E) \pm \sqrt{h_E^2(3 - 2I_E)^2 + 48k^2}}{2(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Известно [79, 108, 155], что параметр  $\mu$  не превосходит по абсолютному значению единицы:  $|\mu| \leq 1$ . Оценим величины  $\mu_{1,2}$  из условия одноосного растяжения образца, когда  $\sigma_1 = \sigma_S$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $k = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_S}{2} = \sigma$ . Согласно (3.12) имеем

$$\mu_{1,2} = \frac{-(3 - 2I_E) \pm \sqrt{(3 - 2I_E)^2 + 3(3E_1 - I_E)^2}}{(3E_1 - I_E)}.$$

На рисунке 3.4 показаны графики изменения значений  $\mu_{1,2}$  в зависимости от относительного удлинения  $\delta$  цилиндрического образца. Откуда следует, что в условиях плоской деформации внеплоское главное напряжение  $\sigma_3$  будет промежуточным только для корня (3.23) с положительным альтернативным знаком:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{-h_E(3 - 2I_E) + \sqrt{12(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + h_E^2(3 - 2I_E)^2}}{4}. \quad (3.24)$$

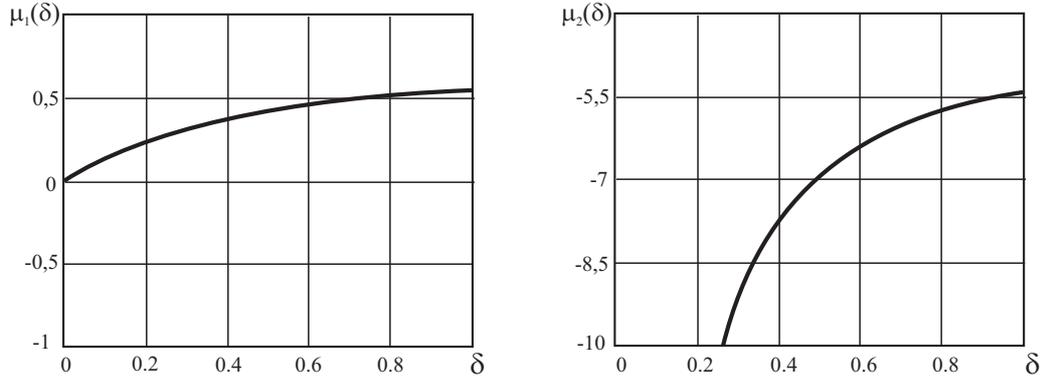


Рисунок 3.4 — Изменение значений параметра  $\mu$  в зависимости от относительного удлинения образца  $\delta$

Учитывая (3.22) в виде

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$k = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

получим выражение для определения  $\sigma_z$  в условиях плоской деформации:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E) + \frac{1}{4}\sqrt{12 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] + h_E^2(3 - 2I_E)^2}. \quad (3.25)$$

Подставив (3.25) в условие (3.20), получим условие пластичности в рамках плоской деформации в неявном виде

$$\begin{aligned} & \left\{ 12 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] + h_E^2(3 - 2I_E)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} - \\ & - 3h_E(3 - 2I_E) \left\{ 12 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] + h_E^2(3 - 2I_E)^2 \right\} = \quad (3.26) \\ & = 2h_E^3 [27 - 2(3 - 2I_E)^3]. \end{aligned}$$

Для того, чтобы представить это условие в явном виде, сделаем замену:

$$X = \sqrt{12 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] + h_E^2(3 - 2I_E)^2}. \quad (3.27)$$

Тогда выражение (3.26) примет вид кубического уравнения:

$$X^3 - 3h_E(3 - 2I_E)X^2 - 2h_E^3 [27 - 2(3 - 2I_E)^3] = 0. \quad (3.28)$$

Найдем корни этого уравнения, для чего сделаем ещё одну замену:

$$Y = X - h_E(3 - 2I_E) \quad \text{или} \quad X = Y + h_E(3 - 2I_E), \quad (3.29)$$

после чего уравнение (3.28) примет вид приведённого кубического уравнения:

$$Y^3 - 3h_E^2(3 - 2I_E)^2Y + 2h_E^3[(3 - 2I_E)^3 - 27] = 0.$$

Учитывая, что  $I_E < 0$ ,  $h_E > 0$ , дискриминант полученного уравнения всегда отрицателен:

$$\begin{aligned} D &= \left[ \frac{-3h_E^2(3 - 2I_E)^2}{3} \right]^3 + \left[ \frac{2h_E^3[(3 - 2I_E)^3 - 27]}{2} \right]^2 = \\ &= 27h_E^6[27 - 2(3 - 2I_E)^3] < 0, \end{aligned}$$

следовательно приведённое уравнение имеет три действительных корня:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 2h_E(3 - 2I_E) \cos \frac{\xi}{3}, \\ Y_2 &= 2h_E(3 - 2I_E) \cos \left( \frac{\xi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right), \\ Y_3 &= 2h_E(3 - 2I_E) \cos \left( \frac{\xi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

где  $\xi = \arccos \left[ \frac{27}{(3 - 2I_E)^3} - 1 \right]$ . Обозначим найденные корни одним выражением:

$$Y = 2h_E(3 - 2I_E) \cos \Phi,$$

где  $\Phi = \frac{\xi}{3} + \xi_{1,2,3}$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\xi_3 = \frac{4\pi}{3}$ . Выполним согласно (3.27) и (3.29) обратные замены, получим

$$\sqrt{12[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] + h_E^2(3 - 2I_E)^2} = h_E(3 - 2I_E)(2 \cos \Phi + 1).$$

Возводя обе части полученного равенства в квадрат, получим условие (3.26)

в явном виде:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{1}{3}h_E^2(3 - 2I_E)^2 \cos \Phi (\cos \Phi + 1). \quad (3.30)$$

Отметим, что правая часть полученного выражения имеет три варианта (в зависимости от значений аргумента  $\Phi$ ). Сравним полученные соотношения с условием пластичности Мизеса, для которого в условиях плоской деформации справедливы соотношения

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_S^2, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (3.31)$$

Тогда как связь правых частей соотношений (3.30) с  $\sigma_S$  при одноосном растяжении цилиндрического образца определяется согласно (3.12), (1.29) и (3.11) в виде

$$\frac{1}{3}h_E^2(3 - 2I_E)^2 \cos \Phi (\cos \Phi + 1) = \frac{4(3 - 2I_E)^2 \cos \Phi (\cos \Phi + 1)}{3(3E_1 - I_E)^2} \sigma_S^2,$$

где

$$E_1 = \frac{\delta(2 + \delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad I_E = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta(2 + \delta)}{(1 + \delta)^2} - 2\delta \right],$$

$$\Phi = \frac{\xi}{3} + \xi_{1,2,3} \quad \left( \xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{2\pi}{3}, \xi_3 = \frac{4\pi}{3} \right).$$

Сравнение коэффициентов при  $\sigma_S^2$  в последних выражениях позволяет установить, что с условием пластичности Мизеса (3.31) сравнимо (в конечных пределах) условие (3.30) при  $\xi_3 = \frac{4\pi}{3}$ . Обозначим этот коэффициент через

$$K(\delta) = \frac{4}{3} \frac{(3 - 2I_E)^2}{(3E_1 - I_E)^2} \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right) \left[ \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right) + 1 \right]. \quad (3.32)$$

На рисунке 3.5 показано сравнение выбранного коэффициента  $K(\delta)$  с величиной  $\frac{4}{3}$ .

Окончательно получаем, что в рамках плоской деформации условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела, определяется выражением:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = K(\delta)\sigma_S^2; \quad (3.33)$$

а внеплоское главное напряжение согласно (3.25) имеет вид

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) \cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right). \quad (3.34)$$

Здесь

$$K(\delta) = \frac{4(3 - 2I_E)^2}{3(3E_1 - I_E)^2} \cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right) \left[ \cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right) + 1 \right];$$

$$E_1 = \frac{\delta(2 + \delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad I_E(\delta) = -\frac{\delta^2(3 + 2\delta)}{2(1 + \delta)^2},$$

$$\xi = \arccos\left[\frac{27}{(3 - 2I_E)^3} - 1\right].$$

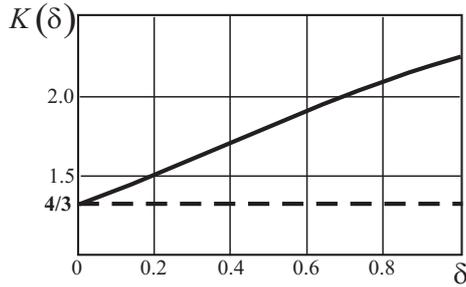


Рисунок 3.5 — Графическое сравнение коэффициентов при  $\sigma_S^2$  в условиях (3.30), (3.31)

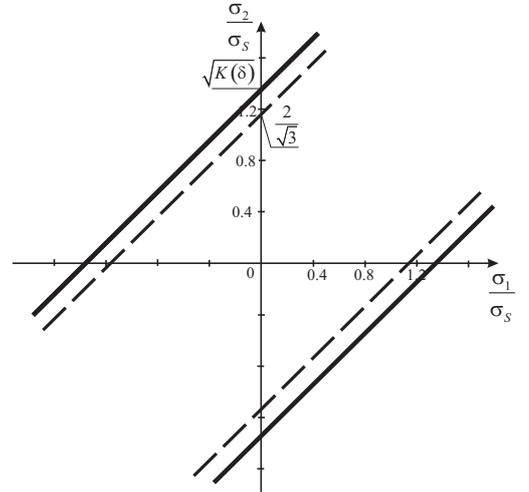


Рисунок 3.6 — Критерии текучести (3.13) — сплошная линия, (3.1) — пунктирная линия, при плоской деформации

На рисунке 3.6 в плоскости относительных напряжений  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_S}, \frac{\sigma_2}{\sigma_S}\right)$  показаны линии, представляющие собой пересечение поверхности (3.13) плоскостью (3.24) и поверхности (3.1) плоскостью  $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ . Для наглядности сплошная линия, соответствующая условию (3.13), построена при  $\delta = 50\%$ .

Таким образом, вид нового условия пластичности (3.33) при плоской деформации совпадает с известным условием Мизеса, отличие заключается в

определении третьего главного значения тензора напряжений (3.34) и в величине коэффициента при  $\sigma_S^2$  в правой части полученного условия (3.33).

При выводе основных соотношений были использованы уравнения для напряжений (3.22), что позволяет утверждать, что система уравнений для напряжений, состоящая из дифференциальных уравнений равновесия и нового условия пластичности, сохраняет свою гиперболичность, как при условии Мизеса в условиях плоской деформации.

### 3.3.2 Осесимметричная деформация и условие полной пластичности

При осесимметричной деформации компоненты тензора напряжения  $\tau_{r\varphi}$  и  $\tau_{z\varphi}$  равны нулю, а  $\sigma_\varphi = \sigma_z$  является одним из главных напряжений [79, 155]. Подставляя в (3.13) выражения, связывающие компоненты тензора напряжений и его главные значения:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[ (\sigma_r + \sigma_z) + \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} \right], \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\sigma_r + \sigma_z) - \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} \right], \\ \sigma_3 &= \sigma_\varphi,\end{aligned}$$

получим условие пластичности в компонентах тензора напряжений при осесимметричной деформации:

$$\begin{aligned}& \left[ (2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\varphi)(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\varphi) - 9\tau_{rz}^2 \right] (2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z) + \\ & + \frac{3}{4} h_E (3 - 2I_E) \left[ (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 \right] = \quad (3.35) \\ & = \frac{h_E^3}{8} \left[ (3 - 2I_E)^3 - 27 \right].\end{aligned}$$

Дифференцируя (3.35) по компонентам тензора напряжений, получим компоненты тензора скорости деформации аналогично (3.21):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_r} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 3\tau_{rz}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\varphi) \right]; \\
\varepsilon_z &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + 3\tau_{rz}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_z - \sigma_\varphi - \sigma_r) \right]; \\
\varepsilon_\varphi &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_\varphi} = 3\lambda' \left[ -2(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 - 6\tau_{rz}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z) \right];
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\frac{1}{2}\eta_{rz} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial \tau_{rz}} = 9\lambda' \tau_{rz} \left[ - (2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z) + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E) \right].$$

Как и в случае плоской деформации, при использовании условия (3.35) имеют место условия несжимаемости и соосности тензора скоростей деформации и девиатора напряжения. Однако в отличие от плоской деформации в условиях осесимметричной деформации  $\varepsilon_3 = \varepsilon_\varphi \neq 0$ .

Как правило, решение задач в условиях осесимметричной деформации строится при предположении условия полной пластичности, «когда два главных напряжения равны» [79, с. 260]. В работе Г. Генки [56] отмечается, что осесимметричная задача является статически определимой только при условии полной пластичности, когда «... оба главных напряжения, действующие в меридианной плоскости, одинаковы, а напряжение, действующее перпендикулярно меридианной плоскости, равно одному из этих двух напряжений..., или же кольцевое напряжение равно одному главному напряжению, действующему в меридианной плоскости, а другое главное напряжений на  $2k$  больше или меньше...». Аналогичное предположение отмечается и в работе А.Ю.

Ишлинского [72]. Условие полной пластичности было получено ещё А. Харом и Т. Карманом [152] из решения вариационной задачи, когда «...два неравенства (из трёх, для главных значений напряжений)<sup>2</sup> обращаются в равенства...». В работах Д. Д. Ивлева [70, 74] обосновывается фундаментальное значение условия полной пластичности для всей теории пластичности.

Покажем, что условие (3.13) содержит условие полной пластичности. Согласно А. Надаи [108, с. 263] «третий закон пластичности» может быть записан в виде

$$\frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad (3.37)$$

где  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) — главные значения тензоров напряжения и скоростей деформации. Подставим (3.19) в правую часть (3.37), получим

$$\begin{aligned} & \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \\ & = \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) - h_E(3 - 2I_E)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)[2(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) - h_E(3 - 2I_E)]}. \end{aligned}$$

Вычитаем полученное выражение из левой части (3.37)

$$\begin{aligned} & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} - \\ & - \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) - h_E(3 - 2I_E)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)[2(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) - h_E(3 - 2I_E)]} = \\ & = \frac{12(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)[2(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) - h_E(3 - 2I_E)]}. \end{aligned}$$

Очевидно, что условие (3.37) будет выполняться, когда полученное выражение будет равно нулю:

$$\frac{12(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)[2(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) - h_E(3 - 2I_E)]} = 0. \quad (3.38)$$

Отсюда следует, что равенство нулю возможно при

$$(\sigma_3 - \sigma_1) = 0 \quad \text{или} \quad (\sigma_2 - \sigma_3) = 0,$$

---

<sup>2</sup> примечание автора

то есть при  $\sigma_3 = \sigma_1$  или  $\sigma_3 = \sigma_2$ , что определяет условие полной пластичности. Полученный результат позволяет сделать вывод, что предлагаемое условие пластичности (3.13) содержит условие полной пластичности.

Вернёмся к равенству (3.38), откуда помимо сказанного выше следует, что

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \quad \text{и} \quad \sigma_3 \neq \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + h_E(3 - 2I_E)}{4}.$$

В книге [79, с. 260] отмечается, что «...Условие  $\sigma_1 = \sigma_2$  приводит к очень частному случаю напряжённого состояния (см. § 59, режим А)...».

Определим вид условия (3.13) при условии полной пластичности в главных значениях тензора напряжений и при  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . Рассмотрим первый возможный случай, когда  $\sigma_3 = \sigma_1$ . Подставляя это условие в (3.13), получим кубическое уравнение относительно разности главных значений напряжения:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^3 - \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{16}h_E^3 [(3 - 2I_E)^3 - 27] = 0. \quad (3.39)$$

Обозначив  $\sigma_1 - \sigma_2 = X$  и произведя замену  $Y = X + \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E)$ , получим приведённое кубическое уравнение:

$$Y^3 - \frac{3}{16}h_E^2(3 - 2I_E)^2Y + \frac{1}{32}h_E^3 [(3 - 2I_E)^3 - 54] = 0.$$

Учитывая, что  $I_E < 0$ ,  $h_E > 0$ , дискриминант полученного уравнения всегда отрицателен:

$$\begin{aligned} D &= \left[ \frac{-h_E^2(3 - 2I_E)^2}{16} \right]^3 + \left[ \frac{h_E^3 [(3 - 2I_E)^3 - 54]}{64} \right]^2 = \\ &= \frac{27}{32^2}h_E^6 [27 - (3 - 2I_E)^3] < 0, \end{aligned}$$

следовательно приведённое уравнение имеет три действительных корня:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) \cos \frac{\xi}{3}, \\ Y_2 &= \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) \cos \left( \frac{\xi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right), \\ Y_3 &= \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) \cos \left( \frac{\xi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

где  $\xi = \arccos \left[ \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} - 1 \right]$ . Выполняя обратные замены:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = X = Y - \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E),$$

получим решения уравнения (3.39) в виде

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E) [2 \cos \Phi + 1], \quad (3.40)$$

где  $\Phi = \frac{\xi}{3} + \xi_{1,2,3}$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\xi_3 = \frac{4\pi}{3}$ .

Теперь рассмотрим второй случай, когда  $\sigma_3 = \sigma_2$ . Тогда из (3.13) получим кубическое уравнение

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^3 + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \frac{1}{16}h_E^3 [(3 - 2I_E)^3 - 27] = 0. \quad (3.41)$$

Выполняя замену  $\sigma_1 - \sigma_2 = X$ , получим уравнение вида (3.14), решение которого приведено выше в настоящей главе. Следовательно, решения уравнения (3.41) примут следующий вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E) [2 \cos \bar{\Phi} - 1], \quad (3.42)$$

где

$$\bar{\Phi} = \frac{\bar{\xi}}{3} + \xi_{1,2,3}, \quad \bar{\xi} = -\xi = \arccos \left[ 1 - \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} \right],$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \xi_3 = \frac{4\pi}{3}.$$

Проанализируем, какие из найденных в (3.40) и (3.42) условий сравнимы с условием пластичности Треска (3.2). Очевидно, что правые части полученных условий (согласно определению коэффициента  $h_E$  (3.12)) зависят от величины предела текучести  $\sigma_S$ . Обозначим коэффициенты при  $\sigma_S$  в обоих условиях через  $K^I$  (для (3.40)) и  $K^{II}$  (для (3.42)). Тогда

$$K^I(\delta) = \frac{(3 - 2I_E)}{2(3E_1 - I_E)} [2 \cos \Phi + 1],$$

$$K^{II}(\delta) = \frac{(3 - 2I_E)}{2(3E_1 - I_E)} [2 \cos \bar{\Phi} - 1], \quad (3.43)$$

где

$$E_1 = \frac{\delta(2 + \delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad I_E = -\frac{\delta^2(3 + 2\delta)}{2(1 + \delta^2)},$$

$$\Phi = \frac{\xi}{3} + \xi_{1,2,3}, \quad \bar{\Phi} = \frac{\bar{\xi}}{3} + \xi_{1,2,3},$$

$$\xi = \arccos \left[ \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} - 1 \right], \quad \bar{\xi} = -\xi = \arccos \left[ 1 - \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} \right],$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \xi_3 = \frac{4\pi}{3}.$$

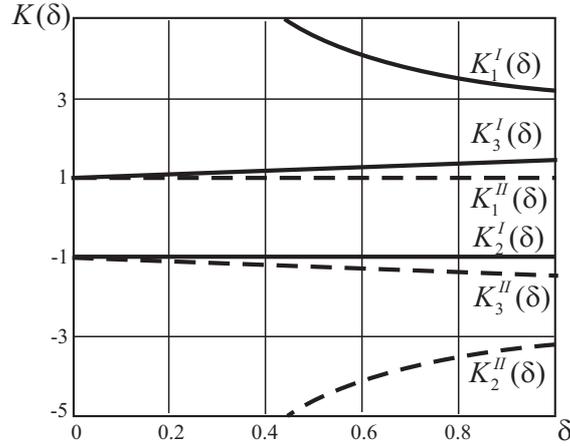


Рисунок 3.7 — Графическое сравнение коэффициентов при  $\sigma_S$  в условиях (3.40), (3.42), (3.2)

Из (3.2) следует, что введенные коэффициенты должны быть сравнимы с единицей. На рисунке 3.7 коэффициенты  $K^I(\delta)$ , соответствующие условию (3.40), изображены сплошными линиями, коэффициенты  $K^{II}(\delta)$  (для (3.42)) — пунктирными линиями. Очевидно, что из трёх коэффициентов в каждом условии сравнимы с единицей только два: в первом условии это коэффициенты, соответствующие величинам  $\xi_2 = \frac{2\pi}{3}$  и  $\xi_3 = \frac{4\pi}{3}$ ; во втором условии — коэффициенты, соответствующие  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_3 = \frac{4\pi}{3}$ . Причём

$$K_2^I(\delta) = -K_1^{II}(\delta) = \frac{(3 - 2I_E)}{2(3E_1 - I_E)} \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi + 2\pi}{3} \right) + 1 \right] \approx -1,$$

$$K_3^I(\delta) = -K_3^{II}(\delta) = \frac{(3 - 2I_E)}{2(3E_1 - I_E)} \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right) + 1 \right].$$

Таким образом, при условии полной пластичности  $\sigma_3 = \sigma_1$  или  $\sigma_3 = \sigma_2$  получаем систему соотношений:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm K_2^I(\delta)\sigma_S \approx \mp\sigma_S, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm K_3^I(\delta)\sigma_S.$$

Учитывая (3.16) и (3.17) окончательно получаем:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S^+, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S^-. \quad (3.44)$$

Аналогично получаются две другие системы соотношений:

— в случае  $\sigma_\varphi = \sigma_2$  при условии полной пластичности  $\sigma_2 = \sigma_1$  или  $\sigma_2 = \sigma_3$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_S^+, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_S^-; \quad (3.45)$$

— в случае  $\sigma_\varphi = \sigma_1$  при условии полной пластичности  $\sigma_1 = \sigma_2$  или  $\sigma_1 = \sigma_3$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_S^+, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_S^-. \quad (3.46)$$

Уравнения (3.44)–(3.46) определяют два шестиугольника, изображённых на рисунке 3.8. При этом внутренний шестиугольник совпадает с условием Треска (3.2). На рисунке 3.8 показано, как полученные шестиугольники ассоциируются с новым условием пластичности (3.13) (треугольнообразная гладкая кривая изображена точечной линией).

Определим вид третьего главного значения  $\sigma_\varphi$  тензора напряжений при условии полной пластичности. Подставляя соотношения (1.7)

$$\begin{cases} \sigma_r = p + q \cos 2\psi, \\ \sigma_z = p - q \cos 2\psi, \\ \tau_{rz} = q \sin 2\psi, \end{cases}$$

где  $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ ,  $q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ , в условие (3.35) при осесимметричной деформации, получим уравнение относительно неизвестных  $(\sigma_\varphi - p)$  и  $q$ :

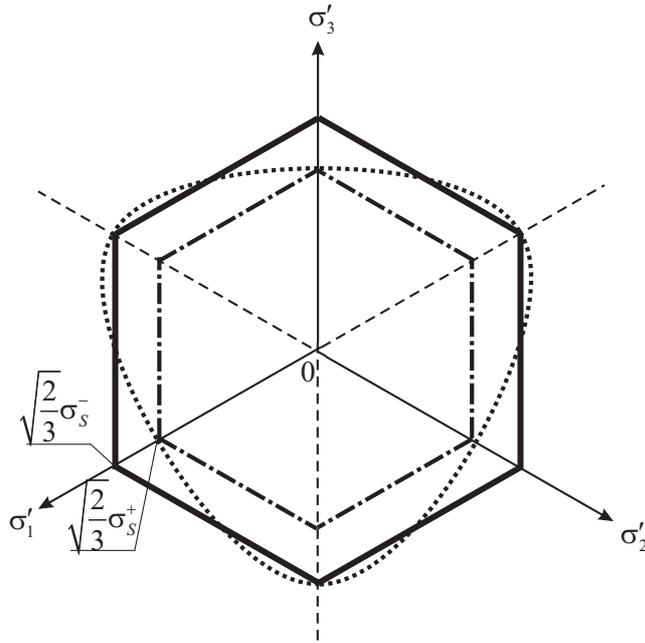


Рисунок 3.8 — Графическое сравнение условий (3.44)—(3.46) с условием Треска (3.2) на девиаторной плоскости

$$\begin{aligned} [(\sigma_\varphi - p)^2 - 9q^2] (\sigma_\varphi - p) + \frac{3}{4} h_E (3 - 2I_E) [(\sigma_\varphi - p)^2 + 3q^2] = \\ = \frac{h_E^3}{16} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Очевидно, что

$$(\sigma_\varphi - p) = \begin{cases} q, & \text{при } \sigma_\varphi = \sigma_1, \\ -q, & \text{при } \sigma_\varphi = \sigma_2; \end{cases} \quad (3.48)$$

и решения уравнения (3.47) для каждого из условий (3.48) связаны с решениями (3.40) и (3.42). Покажем, что это так.

1) При  $\sigma_\varphi - p = q$  ( $\sigma_\varphi = \sigma_1$ ) уравнение (3.47) принимает вид

$$q^3 - \frac{3}{8} h_E (3 - 2I_E) q^2 + \frac{h_E^3}{128} [(3 - 2I_E)^3 - 27] = 0,$$

для которого приведённое кубическое уравнение имеет отрицательный дискриминант:

$$D = \frac{27}{2 \cdot 32^3} h_E^6 [27 - (3 - 2I_E)^3] < 0$$

и, следовательно, три действительных корня. Откуда имеем одно из решений уравнения (3.47):

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) + \frac{1}{8}h_E(3 - 2I_E) [2 \cos \Phi + 1], \quad (3.49)$$

при

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{8}h_E(3 - 2I_E) [2 \cos \Phi + 1], \\ \Phi &= \frac{\xi}{3} + \xi_{1,2,3}, \quad \xi = \arccos \left[ \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} - 1 \right], \\ \xi_1 &= 0, \quad \xi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \xi_3 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

2) При  $\sigma_\varphi - p = -q$  ( $\sigma_\varphi = \sigma_2$ ) уравнение (3.47) принимает вид

$$q^3 + \frac{3}{8}h_E(3 - 2I_E)q^2 - \frac{h_E^3}{128} [(3 - 2I_E)^3 - 27] = 0,$$

для которого приведённое кубическое уравнение имеет, очевидно, тот же отрицательный дискриминант, и три действительных корня. Откуда ещё одно решение уравнения (3.47):

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) - \frac{1}{8}h_E(3 - 2I_E) [2 \cos \bar{\Phi} - 1], \quad (3.50)$$

при

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{8}h_E(3 - 2I_E) [2 \cos \bar{\Phi} - 1], \\ \bar{\Phi} &= \frac{\bar{\xi}}{3} + \xi_{1,2,3}, \quad \bar{\xi} = -\xi = \arccos \left[ 1 - \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} \right], \\ \xi_1 &= 0, \quad \xi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \xi_3 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Из полученных решений явно видна связь выражений (3.40) с (3.49) и (3.42) с (3.50), что позволяет выбрать значения  $\sigma_\varphi$ , сравнимые с условием Треска.

Отметим, что при выводе основных соотношений были использованы уравнения для напряжений (1.7). Это позволяет утверждать, что система

уравнений для напряжений, состоящая из дифференциальных уравнений равновесия и нового условия пластичности, сохраняет свою гиперболичность, как при условии Треска в условиях осесимметричной деформации при условии полной пластичности.

### 3.3.3 Плоское напряжённое состояние

При плоском напряжённом состоянии компоненты тензора напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю; а в главных значениях  $\sigma_3 = 0$ . Условия (3.1) и (3.2) на плоскости  $\sigma_1, \sigma_2$  определяются следующими линиями [79, 155]:

— эллипс при условии Мизеса:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_S^2; \quad (3.51)$$

— шестиугольник при условии Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S, \quad \sigma_1 = \pm\sigma_S, \quad \sigma_2 = \pm\sigma_S. \quad (3.52)$$

Подставляя  $\sigma_3 = 0$  в условие (3.13), получим уравнение линии в главных значениях  $\sigma_1, \sigma_2$  тензора напряжения, характеризующей предлагаемое в работе условие пластичности при плоском напряжённом состоянии:

$$\begin{aligned} & (2\sigma_1 - \sigma_2)(2\sigma_2 - \sigma_1)(-\sigma_1 - \sigma_2) + \\ & + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E) [\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2] = \\ & = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

На рисунке 3.9 кривые текучести (3.51), (3.52) и (3.53) при плоском напряжённом состоянии представлены в плоскости относительных напряжений  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_S}, \frac{\sigma_2}{\sigma_S}\right)$ , где согласно (3.16)

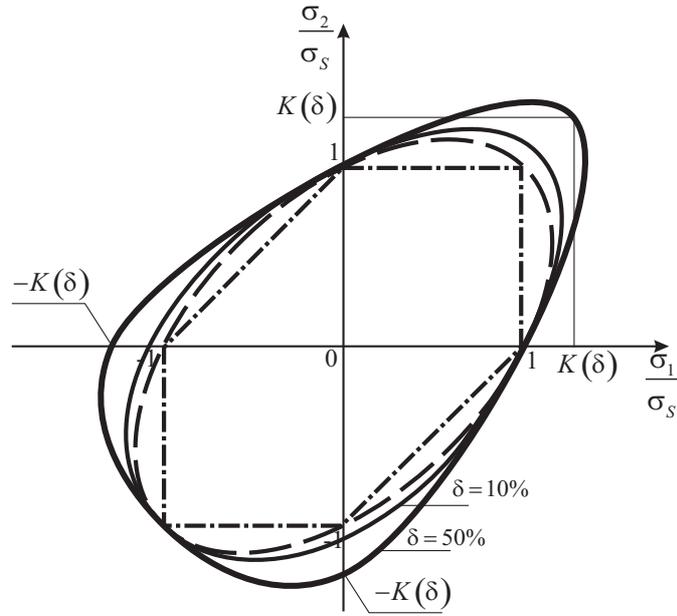


Рисунок 3.9 — Кривые текучести при плоском напряжённом состоянии: условие Мизеса (3.51) — пунктирная линия, условие Треска (3.52) — штрихпунктирная линия, новое условие (3.53) — сплошная линия

$$K(\delta) = \frac{(3 - 2I_E)}{2(3E_1 - I_E)} \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right) + 1 \right],$$

$$E_1(\delta) = \frac{\delta(2 + \delta)}{2(1 + \delta)^2}, \quad I_E(\delta) = -\frac{\delta^2(3 + 2\delta)}{2(1 + \delta)^2},$$

$$\xi(\delta) = \arccos \left[ \frac{54}{(3 - 2I_E)^3} - 1 \right].$$

Как и в рассмотренных выше случаях, при  $\delta \rightarrow 0$  линия (3.53) приближается к линии (3.51).

В компонентах тензора напряжений условие (3.53) имеет вид:

$$\begin{aligned} & [9\tau_{xy}^2 - (2\sigma_x - \sigma_y)(2\sigma_y - \sigma_x)] (\sigma_x + \sigma_y) + \\ & + \frac{3}{2} h_E (3 - 2I_E) [\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2] = \\ & = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Компоненты тензора скорости деформации согласно (3.54) и (1.2) определя-

ются выражениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = 3\lambda' \left[ 2\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y - \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_x - \sigma_y) \right]; \\ \varepsilon_y &= \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = 3\lambda' \left[ 2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y - \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_y - \sigma_x) \right];\end{aligned}\tag{3.55}$$

$$\frac{1}{2}\eta_{xy} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = 9\lambda'\tau_{xy} \left[ \sigma_x + \sigma_y + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E) \right].$$

Учитывая условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,$$

скорость деформации  $\varepsilon_z$  согласно (3.55) определяется выражением

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= -(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \\ &= 3\lambda' \left[ \sigma_x(2\sigma_y - \sigma_x) + \sigma_y(2\sigma_x - \sigma_y) - 6\tau_{xy}^2 - \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(\sigma_x + \sigma_y) \right].\end{aligned}$$

Аналогично в главных значениях компоненты тензора скорости деформации определяются выражениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 3\lambda' \left[ 2\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2 + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_1 - \sigma_2) \right]; \\ \varepsilon_2 &= 3\lambda' \left[ 2\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^2 + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(2\sigma_2 - \sigma_1) \right];\end{aligned}$$

и третье главное значение

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \\ &= 3\lambda' \left[ \sigma_1(2\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_2(2\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E)(\sigma_1 + \sigma_2) \right].\end{aligned}$$

### 3.3.4 Растяжение с кручением

Плоское напряжённое состояние, соответствующее осевому растяжению  $\sigma$  и касательному напряжению кручения  $\tau$ , определяется в компонентах тензора напряжения как  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau$  и все остальные компоненты напряжения равны нулю. В этом случае условие Мизеса (3.1) в плоскости  $\sigma$ ,  $\tau$  определяется эллипсом:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_S^2; \quad (3.56)$$

а условие Треска (3.2) — линией

$$\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_S^2. \quad (3.57)$$

Подставляя в условие (3.9)  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau$ , получим линию, определяющую критерий текучести в рассматриваемом напряжённом состоянии:

$$\sigma(2\sigma^2 + 9\tau^2) + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E)(\sigma^2 + 3\tau^2) = \frac{h_E^3}{8} [(3 - 2I_E)^3 - 27]. \quad (3.58)$$

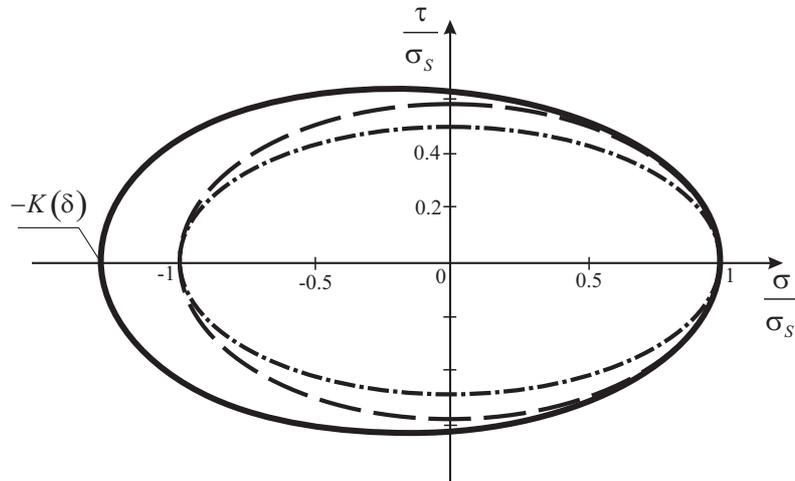


Рисунок 3.10 — Кривые текучести при растяжении и кручении: условие Мизеса (3.56) — пунктирная линия, условие Треска (3.57) — штрихпунктирная линия, новое условие (3.58) — сплошная линия

На рисунке 3.10 представлены кривые текучести в плоскости относительных напряжений  $\left(\frac{\sigma}{\sigma_S}, \frac{\tau}{\sigma_S}\right)$ , определяемые уравнениями (3.56), (3.57), (3.58),

сравнение которых показывает, что при  $\delta \rightarrow 0$  линия (3.58) приближается к линии (3.56).

Из условия несжимаемости следует, что компоненты тензора скорости деформации в данном напряжённом состоянии удовлетворяют равенствам  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1}{2}\varepsilon_x$  [108], и согласно ассоциированному закону пластического течения (1.2) из (3.58) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 3\lambda' \left[ 2\sigma^2 + 3\tau^2 + h_E(3 - 2I_E)\sigma \right], \\ \frac{1}{2}\eta_{xy} &= 9\lambda'\tau \left[ \sigma + \frac{h_E}{2}(3 - 2I_E) \right].\end{aligned}\quad (3.59)$$

### 3.4 Энергетическое условие развития пластического течения

Известно [79], что удельная мощность диссипации работы внутренних сил на пластических деформациях определяется соотношением

$$\dot{W}_p = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \lambda'\sigma_{ij}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.60)$$

или в главных значениях тензоров напряжения и скорости деформации

$$\dot{W}_p = \sigma_i\varepsilon_i = \lambda'\sigma_i\frac{\partial f}{\partial \sigma_i}, \quad (3.60')$$

с учётом ассоциированного закона пластического течения (1.2). Подставляя в (3.60') соотношения (3.19) согласно условию пластичности (3.13), запишем энергетическое условие развития пластического течения в инвариантах дивергатора напряжения [44]:

$$27III_{D_\sigma} + 3h_E(3 - 2I_E)II_{D_\sigma} = \frac{1}{\lambda'}\dot{W}_p,$$

или в главных значениях тензора напряжения:

$$\begin{aligned}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) + \\ + \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{\lambda'}\dot{W}_p.\end{aligned}\quad (3.61)$$

Подставим в (3.61)  $\sigma_1 = \sigma_S$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  согласно (3.11), (3.12) получим энергетическое условие развития пластического течения при одноосном растяжении цилиндрического образца в виде

$$\sigma_S^3(\delta) \frac{6(1+\delta)^3}{\delta(\delta^2 + 3\delta + 3)} = \frac{\dot{W}_p}{\lambda'}, \quad (3.62)$$

где скалярный множитель  $\lambda'$  должен определяться в каждой точке пути деформирования условием пластичности или упрочнения. В разделе 4.2 показана связь величины  $\dot{W}_p$  с параметром упрочнения, которая при условии (4.11) позволяет определить скалярный множитель  $\lambda'$  в виде конечного соотношения при одноосном растяжении цилиндрического образца. При этом энергетическое условие развития пластического течения предлагается использовать как дополнительное в системе определяющих соотношений теории упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела.

Рассмотрим энергетическое условие (3.61) развития пластического течения при выбранном условии пластичности для различных деформационных состояний.

Покажем, что при плоской деформации энергетическое условие (3.61) с точностью до множителя совпадает с самим условием пластичности (3.33), аналогично условию Мизеса (3.31). Действительно, запишем условие (3.33)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = K(\delta)\sigma_S^2,$$

и продифференцируем его согласно ассоциированному закону (1.2), откуда получим компоненты тензора скорости деформации:

$$\varepsilon_x = 2\lambda'(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_y = -2\lambda'(\sigma_x - \sigma_y), \quad \frac{1}{2}\eta_{xy} = 4\lambda'\tau_{xy}.$$

Подставив их в (3.60) и выполнив элементарные математические действия, получим

$$\frac{1}{2\lambda'}\dot{W}_p = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \stackrel{(3.33)}{=} K(\delta)\sigma_S^2, \quad (3.63)$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda'} \dot{W}_p = 2K(\delta)\sigma_S^2 \quad \text{или} \quad \lambda' = \frac{\dot{W}_p}{2K(\delta)\sigma_S^2},$$

где коэффициент  $K(\delta)$  определяется согласно (3.33). Из (3.63) следует, что множитель  $\lambda'$  пропорционален удельной мощности диссипации работы внутренних сил на пластических деформаций  $\dot{W}_p$ .

Вид энергетического условия при осесимметричной деформации определяется при подстановке компонент тензора скорости деформации (3.36) в соотношение (3.60):

$$\begin{aligned} & [(2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\varphi)(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\varphi) - 9\tau_{rz}^2] (2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z) + \\ & + \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E) [(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2] = \frac{1}{3\lambda'} \dot{W}_p. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Очевидно, что если подставить в условия (3.35) и (3.64) определённое ранее главное значение  $\sigma_\varphi$  тензора напряжений (3.49) или (3.50) при условии полной пластичности, то оба условия будут определяться выражением, общий вид которого отмечен в работе [71]:

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = K.$$

Отличие будет заключаться в виде функции  $K$ , зависящей от констант материала (для условия пластичности) и величины  $\frac{1}{\lambda'} \dot{W}_p$ , определяемой из энергетического условия.

Подставляя  $\sigma_3 = 0$  в (3.61), получим энергетическое условие при плоском напряжённом состоянии в главных значениях тензора напряжений:

$$\begin{aligned} & (2\sigma_1 - \sigma_2)(2\sigma_2 - \sigma_1)(-\sigma_1 - \sigma_2) + \\ & + h_E(3 - 2I_E) [\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2] = \frac{1}{\lambda'} \dot{W}_p; \end{aligned}$$

или, подставив (3.55) в (3.60), в компонентах тензора напряжений:

$$\begin{aligned} & [9\tau_{xy}^2 - (2\sigma_x - \sigma_y)(2\sigma_y - \sigma_x)] (\sigma_x + \sigma_y) + \\ & + h_E(3 - 2I_E) [\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2] = \frac{1}{3\lambda'} \dot{W}_p. \end{aligned}$$

Аналогично, подставляя (3.59) в (3.60), получим энергетическое условие развития пластического течения при растяжении и кручении:

$$\sigma(2\sigma^2 + 9\tau^2) + h_E(3 - 2I_E)(\sigma^2 + 3\tau^2) = \frac{1}{3\lambda'} \dot{W}_p.$$

### 3.5 Выводы к третьей главе

Предложено поверхность нагружения связать с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёстко-пластического тела, для построения которой вводится пропорциональность между девиаторами для тензоров напряжения и конечных деформаций, не являющаяся дополнительным определяющим соотношением. Пропорциональность обоснована геометрией линией уровня, и основана на экспериментально подтверждаемых кривых текучести. Коэффициент пропорциональности предлагается определять из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца.

На основе введённой пропорциональности сформулировано новое условие пластичности, содержащее второй и третий инварианты девиатора напряжения. Условие является гладким и выпуклым, геометрически представляет замкнутый криволинейный треугольник с тремя осями симметрии в девиаторной плоскости. Проведено сравнение нового условия с классическими условиями текучести: Мизеса и Треска, при различных деформационных состояниях (плоской деформации, осесимметричной деформации, плоского напряжённого состояния, в том числе при растяжении и кручении). Показано, что:

– в условиях плоской деформации вид нового условия совпадает с условием пластичности Мизеса, отличие заключается в определении третьего «внеплоского» главного значения тензора напряжений;

– при использовании нового условия пластичности выполняются условия несжимаемости и соосности тензора скорости деформации и девиатора напряжения, но не выполняются соотношения Сен-Венана–Мизеса (условие пропорциональности компонент тензора скорости деформации и девиатора напряжения);

– новое условие позволяет учитывать различие пределов текучести материала на растяжение и сжатие, связанное с эффектом Баушингера.

Доказано, что характер гиперболичности системы уравнений для напряжений, состоящей из дифференциальных уравнений равновесия и условия пластичности, сохраняется; структура системы совпадает с соответствующими системами дифференциальных уравнений при условии Мизеса в плоской деформации и при условии Треска в осесимметричной деформации при условии полной пластичности.

Получено энергетическое условие развития пластического течения при различных деформационных состояниях. Показано, что при условии плоской деформации энергетическое условие с точностью до множителя совпадает с самим условием пластичности; как и при осесимметричной деформации при условии полной пластичности. Энергетическое условие предлагается использовать как дополнительное в системе определяющих соотношений теории упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела.

## Глава 4

### Предельное состояние пластических тел

Предлагается подход к описанию процесса достижения материалом предельного состояния на основе модели упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела как обобщение соотношений малоциклового усталости на общие процессы деформирования.

Начиная с работ Дж. Р. Ирвина [185] и Е. Орована [206], предельные состояния твёрдых тел принято связывать с пластическими свойствами материала. Под предельным состоянием пластических тел понимается состояние, непосредственно предшествующее моменту разрушения (нарушению сплошности среды). При этом наиболее фундаментальные экспериментальные исследования по определению предельного состояния проводятся на основе двух процессов деформирования: монотонное деформирование (классическая диаграмма нагружения) и циклическое деформирование с контролем деформаций образца (малоцикловая усталость).

Что понимать под предельным состоянием и как его описывать? В работе [103] предлагается оценивать долговечность (количество циклов) до момента зарождения усталостной трещины в окрестности концентратора напряжений при жёстком и мягком режимах нагружения на основе концепции энергетического  $J$ -интеграла в рамках закономерностей малоциклового разрушения. При этом отмечается (со ссылкой на работу [154]), что единого подхода для описания закономерностей и периода зарождения трещин в окрестности концентратора напряжений не существует. С. В. Серенсенем [126, 144] была отмечена связь между поверхностью нагружения и предельным состоянием материала, где предлагается под предельным состоянием материала считать состояние исчерпания его пластических свойств, то есть

состояние предельного упрочнения. Возможность описания предельных состояний угловыми точками поверхности нагружения рассматривается в работах Д. Д. Ивлева и его коллег [47, 69–71, 74, 133, и др.]. В работах Г. С. Писаренко, И. И. Гольденבלата, Г. А. Гениева [54, 58, 124, 125] предельное состояние материала описывается замкнутым криволинейным треугольником с тремя осями симметрии в девиаторной плоскости пространства главных напряжений. Экспериментальные исследования предельных состояний пластических тел связаны, в первую очередь, с испытаниями на малоцикловую усталость при одноосном растяжении–сжатии плоских и цилиндрических образцов, [104, 127, 151, 182, 184, 202, 203]. При этом отмечается, что соотношения малоциклового усталости мало зависят от упругих свойств материала и в основном определяются его пластическими свойствами.

Рассматриваемая в работе [50] объединённая модель усталостного разрушения включает в себя модель много- и малоциклового усталости, модель докритического роста усталостной трещины в повреждённом материале и условие, определяющее начальный размер макротрещины. При этом в качестве меры повреждения материала при циклическом деформировании принимается разрыхление, а границей использования расчётных моделей много- и малоциклового усталости и механики разрушения принимается начальный размер усталостной трещины. Предлагаемая в работах [51–53] математическая модель механики повреждённой среды позволяет численно описывать процессы сложного пластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах с учётом монотонного и циклического упрочнения, а также при произвольных траекториях деформирования. В работе [7] отмечается, что наиболее широкое применение для оценки предельного состояния материалов имеют деформационные и энергетические критерии малоциклового усталости. Деформационные критерии достаточно эффективны и просты для одноосного или пропорционального деформирования; предельное состоя-

ние материала может оцениваться значениями амплитуд полной деформации, её упругой или пластической составляющими [93, 148]. Согласно энергетическому подходу к оценке усталостного повреждения и разрушения материалов предельное состояние наступает, когда суммарная энергия, связанная с его упрочнением, достигает критического значения; за меру повреждения выбирается удельная рассеянная энергия или удельная работа пластической деформации за цикл нагружения. Использование энергетических критериев при непропорциональном деформировании практически обуславливает требования к выбору теории пластичности для более точного прогнозирования петель упругопластического гистерезиса. Применение основных соотношений теории малоциклового усталости при исследовании процессов разрушения отмечается и во многих других работах, в частности при описании поведения трещин в материалах с учётом накопления повреждений в зоне предразрушения [61, 86, 87, 106].

В работах [18, 29, 91, 163, 165, 173] предельное состояние материала предлагается описывать линиями на поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела. В сечениях этой поверхности плоскостями, параллельными девиаторной плоскости, предлагаемые линии имеют вид криволинейных треугольников, отмеченных в работах [54, 58, 124, 125, 129]. В качестве критериальной величины, описывающей предельное состояние материала, принимается удельная работа внутренних сил на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала, что подтверждается основными соотношениями малоциклового усталости.

## 4.1 Деформационно-энергетический подход и малоцикловая усталость материалов

Предельное состояние материала при монотонном нагружении не является единственным, что подтверждается многочисленными опытами на малоцикловую усталость, описываемую формулой Коффина-Мэнсона [126, 182, 202]

$$\varepsilon_p N^m = M, \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon_p$  — ширина петли гистерезиса;  $N$  — число циклов;  $m$ ,  $M$  — константы материала. Энергетическая интерпретация формулы (4.1) была предложена С. Фелтнером и Дж. Морроу [184], согласно которой разрушение наступает, когда суммарная энергия, рассеиваемая в единице объёма материала, вследствие наличия необратимых пластических деформаций достигает определённой критической величины:

$$\sum_{N=1}^{N_p} W_N = W_c, \quad (4.2)$$

где  $N_p$  — число циклов до разрушения;  $W_N$  — энергия, рассеиваемая в единице объёма материала при  $N$ -ом цикле;  $W_c$  — критическая величина энергии, равная энергии разрушения при статическом разрыве. При этом в работе [126] отмечается, что суммарная энергия в единице объёма материала до разрушения не может быть принята в качестве критерия разрушения материала при многократном упругопластическом деформировании, что подтверждается экспериментальными данными. Д. Мартином [203] было предложено уточнить данную формулировку, предполагая, что мерой усталостных повреждений является только часть энергии, связанная с процессами упрочнения. На рисунке 4.1 часть энергии пластической деформации  $W^h$ , связанная с упрочнением («hardening»), показана заштрихованными площадями. В частности,

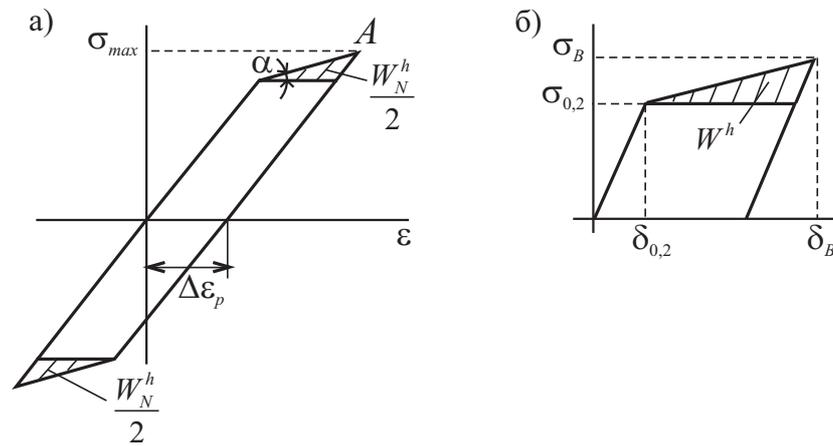


Рисунок 4.1 — Энергия пластической деформации, связанная с процессами упрочнения:  
а) — в цикле [126]; б) — при монотонном нагружении

при линейном упрочнении для монотонного нагружения (рисунок 4.1, б)) справедливо соотношение

$$W_c(\sigma_B) = \frac{1}{2}(\sigma_B - \sigma_{0,2})(\delta_B - \delta_{0,2}),$$

где  $\sigma_B$  — предел прочности материала, соответствующий предельному состоянию материала на диаграмме нагружения;  $\sigma_{0,2}$  — минимальное значение предела текучести;  $\delta_B, \delta_{0,2}$  — соответствующие значения относительного удлинения образца. В данной формуле работа на упругих деформациях не учитывается в виду ее малости.

Согласно [126] работа, отвечающая за повреждение материала в цикле, может быть определена по формуле

$$W_N = \operatorname{tg} \alpha \Delta \varepsilon_p^2,$$

где  $\alpha$  — угол наклона линии упрочнения. Тогда работа за  $N$  циклов равна

$$\sum_1^N W_N = \operatorname{tg} \alpha \Delta \varepsilon_p^2 N. \quad (4.3)$$

Принимая, что разрушение наступает тогда, когда повреждения в материале достигнут некоторой критической величины, циклическая долговечность

может быть определена из формулы (4.3) в виде

$$\operatorname{tg} \alpha \Delta \varepsilon_p^2 N_p = W_{**}, \quad (4.4)$$

где  $N_p$  — число циклов, необходимых для зарождения трещины в материале. Согласно трактовке Фелтнера–Морроу–Мартина  $W_c^h = W_{**}$ , и формула (4.4) может быть интерпретирована как *энергетический критерий достижения материалом предельного состояния (зарождение макротрещины)*, см. раздел 2.4.1.

Если предположить, что полная работа повреждения равна работе при статическом нагружении (в частности, при растяжении):

$$N_p = 0,5, \quad \Delta \varepsilon_p = \delta_B, \quad W_{**} = 0,5 \operatorname{tg} \alpha \delta_B^2,$$

то на основании энергетического критерия (4.4) формула для определения долговечности материала примет следующий вид

$$N_p^{0,5} \Delta \varepsilon_p = \frac{\delta_B}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \alpha} W_{**}.$$

При нелинейном законе упрочнения формула принимает общий вид:

$$\Delta \varepsilon_p N^m = M(W_{**}). \quad (4.5)$$

Согласно соотношению (4.2) процесс доведения материала до критического состояния при жёстком циклическом нагружении образца можно трактовать следующим образом, рисунок 4.2: при каждом цикле нагружения критическая точка  $B$  смещается по диаграмме  $\sigma - \delta$  влево согласно энергии гистерезиса (точка  $B'$ ) и при достижении определённого деформированного состояния в цикле (точка  $A$ ) материал достигает предельного состояния. Отметим, что на девиаторной плоскости предельному состоянию материала соответствует множество точек определённой линии  $m_*$  (см. рисунок 3.1).

В соотношении (4.2) величина  $W_c$  (заштрихованная область) определяет только предельное состояние материала, соответствующее точке  $B$  на статической диаграмме (см. рисунок 4.2). Для разрушения материала (образования новых свободных поверхностей) необходимо сообщить дополнительную энергию  $W_*$ , так сказать совершить «долом» материала (см. главу 5).

В работе [126] отмечается, что разрушение материала после определённого числа циклов связано с накоплениями деформаций и исчерпанием пластичности (то есть с предельным деформационным упрочнением). Поэтому естественно связать предельное состояние материала с его предельным упрочнением и с соответствующим ему положением поверхности нагружения. Соотношение (4.2) не содержит упругих констант и, следовательно, при расчёте можно ограничиться рассмотрением упрочняющегося жёсткопластического тела. Принято считать [151], что в интервале долговечности, меньших  $10^3$  циклов, упругую деформацию оправданно не учитывать, а её учёт обязателен при долговечностях, больших  $10^5$ .

Реальные процессы деформирования материала в элементах конструкций могут значительно отличаться от одноосного деформирования, и соотношение (4.2) должно быть обобщено на пространственные процессы деформирования. Это обобщение должно учитывать следующие особенности малоциклового усталости:

– повреждаемость материала осуществляется за счёт энергии гистерезиса на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала, что

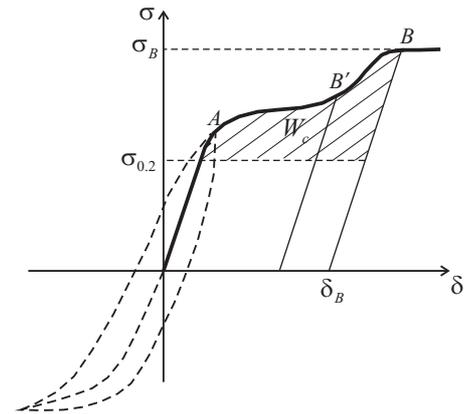


Рисунок 4.2 — Энергия пластической деформации, связанная с процессом упрочнения материала и вызывающая его повреждение

требует учёта эффекта Баушингера;

– диапазон пластического деформирования материала значительно превышает диапазон малых деформаций, что требует использования в качестве меры деформаций тензоров конечных деформаций.

В разделе 3.2 рассматривается поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности  $\Sigma$  деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела. Связь между поверхностью нагружения и предельным состоянием материала определяется гипотезой, высказанной С. В. Серенсеном [126, 144]: предельным состоянием материала считается состояние исчерпания

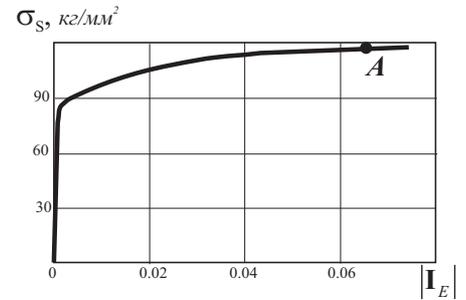


Рисунок 4.3 — Диаграмма нагружения для сплава ЭК79

его пластических свойств, то есть состояние предельного упрочнения. Таким образом, в работе предполагается, что при определённом уровне деформирования условие пластичности определяется формой линии уровня, размер которой соответствует диаграмме нагружения для конкретного материала. Для того чтобы связать поверхность деформационных состояний  $\Sigma$  и поверхность нагружения  $\Omega$ , необходимо перестроить диаграмму нагружения (на рисунке 4.3 показана диаграмма на примере стали ЭК79) [165]: предполагается использование гипотезы единой кривой, но построенной не в традиционных координатах интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига, а в виде зависимости текущего значения предела текучести  $\sigma_S(|I_E|)$ , определяемого значением параметра упрочнения, который совпадает с модулем первого инварианта  $I_E$  тензора конечных деформаций Альманси. При этом точке  $A$  предельного состояния материала на диаграмме нагружения (рисунок 4.2) соответствует некоторая линия  $M$  на предельной поверхности или  $m$  на девиаторной плоскости (см. рисунок 3.1). Причём, если материал мо-

нотонно однократно деформировался, то положение предельной линии будет максимально удалено от точки  $O$  недеформированного состояния. Если же материал испытывал сложное нагружение (включая циклическое с произвольной формой циклов), то линия предельного состояния примет другое положение ближе к недеформированному состоянию, [91].

При этом удельная работа внутренних сил  $W$  при деформировании из точки  $O$  (при  $|I_E| = 0$ ) до уровня  $|I_E|$  равна одному и тому же значению. В разделе 4.2 показана связь удельной мощности диссипации работы внутренних сил и параметра упрочнения. При деформировании по ортогональным процессам происходит упрочнение материала, а при деформировании по касательным к линиям уровня упрочнения не происходит.

Построение поверхности нагружения для конкретных конструкционных материалов предлагается связывать с описанием процессов одноосного деформирования плоских и цилиндрических образцов с использованием первого инварианта тензора конечных деформаций, определяемого через относительное удлинение образца  $\delta$  при растяжении: при плоской деформации согласно формулам (1.26), при осесимметричной деформации — (1.29).

Предлагаемый деформационно-энергетический подход является обобщением классического подхода, используемого при оценке малоциклового усталости на общие пространственные процессы деформирования, в том числе с произвольной формой цикла.

## 4.2 Упрочняющееся жёсткопластическое тело и параметр упрочнения

Известно, что при упрочнении материала поверхность нагружения не может оставаться фиксированной, а по мере развития упрочнения должна расширяться или смещаться некоторым образом.

Простым вариантом упрочнения считается изотропное (равномерное) расширение поверхности текучести:

$$f(II_{D_\sigma}, III_{D_\sigma}) = F(q), \quad (4.6)$$

где  $F$  — некоторая возрастающая функция,  $q$  — параметр (мера упрочнения), характеризующий историю пластического деформирования. Для фиксированной поверхности текучести (как при идеальной пластичности) справедливо соотношение  $F(q) = const.$ ; которое, в частности, выполняется для условий текучести Мизеса (3.1) и Треска (3.2). В качестве параметра упрочнения может быть принята работа пластической деформации (так называемое энергетическое условие упрочнения)

$$q = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p;$$

или накопленная пластическая деформация (параметр Одквиста) [117]

$$q = \int \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}.$$

В [79] отмечается, что в случае изотропной среды функция  $f$  должна зависеть только от инвариантов девиатора напряжения. Согласно закону (4.6) поверхность нагружения остаётся подобной самой себе, равномерно расширяясь при накоплении пластических деформаций. При этом эффект Баушингера не может быть учтён, поскольку пределы текучести на растяжение и сжатии должны оставаться одинаковыми.

Другим вариантом изменения положения поверхности нагружения при упрочнении является так называемое трансляционное упрочнение, когда поверхность испытывает жёсткое смещение в направлении деформирования. Данная схема позволяет описывать эффект Баушингера. Возможно комбинирование указанных схем упрочнение, когда поверхность нагружения испытывает одновременное равномерное расширение и перенос, сохраняя подобие

формы. Во всех случаях для простоты формулировки условий упрочнения, как правило, принято использовать только квадратичный инвариант девиатора напряжения.

Рассмотрим поведение поверхности нагружения (3.9) при упрочнении. В качестве параметра упрочнения выбран модуль первого инварианта  $I_E$  тензора конечных деформаций Альманси, характеризующий уровень деформаций относительно поверхности деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела (см. раздел 3.1). Закон упрочнения (4.6) принимает следующий вид

$$6III_{D_\sigma} + h_E(3 - 2I_E)II_{D_\sigma} = F(|I_E|). \quad (4.7)$$

Расчёты показывают, при увеличении пластических деформаций параметр упрочнения согласно (3.11) увеличивается, при этом функция  $F(|I_E|)$  возрастает. На рисунке 4.4 на девиаторной плоскости показаны изменения поверхности нагружения с ростом пластических деформаций (то есть при упрочнении), совпадающие с поведением линий уровня поверхности деформационных состояний  $\Sigma$  (см. раздел 3.1). Очевидно, что поверхность расширяется, однако характер упрочнения носит неравномерный характер, что объясняется отличием пределов текучести на растяжение и сжатие при рассматриваемом в работе условии пластичности (3.13).

Дополнительным условием в системе определяющих уравнений теории упрочняющегося жёсткопластического тела предлагается принять энергетическое условие развития пластического течения (3.61). Определим зависимость удельной мощности диссипации работы внутренних сил  $\dot{W}_p$  от выбранного параметра упрочнения  $|I_E|$ , [29, 44]. Запишем соотношения (1.20) в глав-

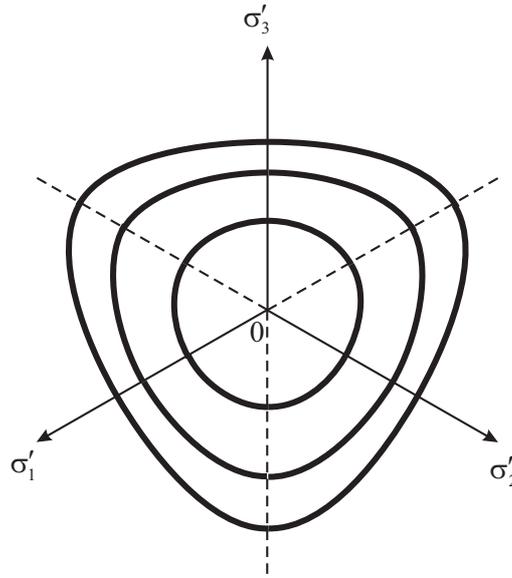


Рисунок 4.4 — Расширение поверхности нагружения при упрочнении

ных значениях тензора Альманси

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_1}{dt} + 2E_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} &= \varepsilon_1, \\
 \frac{dE_2}{dt} + 2E_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} &= \varepsilon_2, \\
 \frac{dE_3}{dt} + 2E_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= \varepsilon_3,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

которые при известном поле скоростей перемещений  $V_i = V_i(\mathbf{x})$  могут быть легко проинтегрированы. Просуммируем согласно условию несжимаемости (1.1) уравнения (4.8):

$$\frac{dI_E}{dt} + 2E_i \varepsilon_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}).$$

Учитывая введённую в работе пропорциональность (3.7) девиаторов тензоров напряжения и конечных деформаций Альманси, получим прямую зависимость удельной мощности диссипации работы внутренних сил  $\dot{W}_p$  со скоростью изменения первого инварианта  $I_E$  тензора Альманси:

$$\frac{dI_E(\delta)}{dt} + 2 \frac{\sigma_i}{h_E(\delta)} \varepsilon_i = 0 \quad \text{или} \quad -h_E(\delta) \frac{dI_E(\delta)}{dt} = 2\dot{W}_p, \tag{4.9}$$

где  $\dot{W}_p = \sigma_i \varepsilon_i > 0$  — диссипативная функция (3.60'). Отметим, что  $I_E < 0$ ,  $\frac{dI_E}{dt} < 0$ ,  $h_E > 0$ . Из (4.9) следует, что если инвариант  $I_E$ , модуль которого предлагается в работе за параметр упрочнения, не изменяется, то диссипация энергии равна нулю, то есть нагружение вдоль линии уровня поверхности деформационных состояний (см. раздел 3.1), не должно приводить к пластическим деформациям. Используя величину коэффициента пропорциональности  $h_E(\delta)$  согласно (3.12), определённого в условиях одноосного растяжения цилиндрического образца:  $\sigma_1 = \sigma_S$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , условие (4.9) может быть записано в виде

$$-\sigma_S(\delta) \frac{(1+\delta)^2}{\delta(\delta^2+3\delta+3)} \frac{dI_E(\delta)}{dt} = \dot{W}_p. \quad (4.10)$$

В качестве монотонного возрастающего параметра  $t$ , характеризующего развитие пластического течения, может быть принята величина относительного удлинения  $\delta$  цилиндрического образца при одноосном растяжении. В разделе 3.4 показан вид энергетического условия в условиях одноосного растяжения цилиндрического образца:

$$\sigma_S^3(\delta) \frac{6(1+\delta)^3}{\delta(\delta^2+3\delta+3)} = \frac{\dot{W}_p}{\lambda'}, \quad (4.11)$$

Используя соотношения (3.11), (4.11) и (4.10), получим выражение для определения скалярного множителя  $\lambda'$ , соответствующего процессу деформирования цилиндрического образца:

$$\lambda'(\delta) = -\frac{1}{6\sigma_S^3(\delta)(1+\delta)} \frac{dI_E(\delta)}{d\delta} = \frac{1}{\sigma_S^2(\delta)} \frac{\delta(\delta^2+3\delta+3)}{6(1+\delta)^4},$$

который может быть использован для определения компонент тензора скорости деформации согласно ассоциированному закону пластического течения (1.2) при условии пластичности (3.13).

### 4.3 Пластическое течение при обработке жёсткопластической полуплоскости выглаживанием

Влияние качества поверхности на предел усталости материала исследуется во многих работах, обзор некоторых из них дан в работе [154]. Исследования распределения остаточных напряжений и пластических деформаций в упрочнённом слое образца (в частности, после поверхностного пластического деформирования, пневмодробеструйной обработки) рассматриваются в работах В. П. Радченко, В. Ф. Павлова и их коллег [81, 118, 119, 138, 139, 141, и др.] Работы Р. И. Непершина [110–115] посвящены упрочнению поверхностного слоя на основе решений плоской задачи пластического течения, в частности, при обработке скользящим инструментом с различной формой поперечного сечения идеально пластического полупространства, при качении и скольжении жёсткого цилиндра. Как правило, решения проводятся с привлечением численных расчётов. Отметим, что в работах [31, 181] предложен аналитический метод построения пластической области при скольжении гладкого кругового цилиндра по жёсткопластическому полупространству, основанный на аппроксимации линий скольжения дугами окружностей. Полученные результаты подтверждаются экспериментальными [142] и численными данными [111, 113].

Зарождение усталостного разрушения, как правило, наблюдается на поверхности детали. Основными причинами, влияющими на усталостное разрушение, являются геометрические концентраторы деформаций (следы механической обработки, царапины, выемки), а также повреждения, вносимые существенными пластическими деформациями в зоне взаимодействия материала детали с обрабатывающим инструментом. Это связано с упрочнением материала и исчерпанием его пластических свойств (охрупчиванием материала). Как отмечено выше, такое влияние хорошо исследовано в малоцикло-

вой усталости и выражается формулой Коффина–Мэнсона (4.1), энергетическая трактовка которой дана С. Фелтнером, Дж. Морроу, Д. Мартином [184, 202, 203].

Задача о выглаживании возникает в связи с необходимостью оценки повреждаемости поверхностного слоя детали при изготовлении в процессе резания, связанного с существованием переходной поверхности, соединяющей переднюю и заднюю поверхности резца. Эта поверхность осуществляет деформирование материала после стружкообразования, описанного в [66]. На рисунке 4.5 представлена схема пластического течения, моделирующая поведение материала при выглаживании жёсткопластической полуплоскости острым клином [18, 165]. Деформации в поверхностном слое при обработке

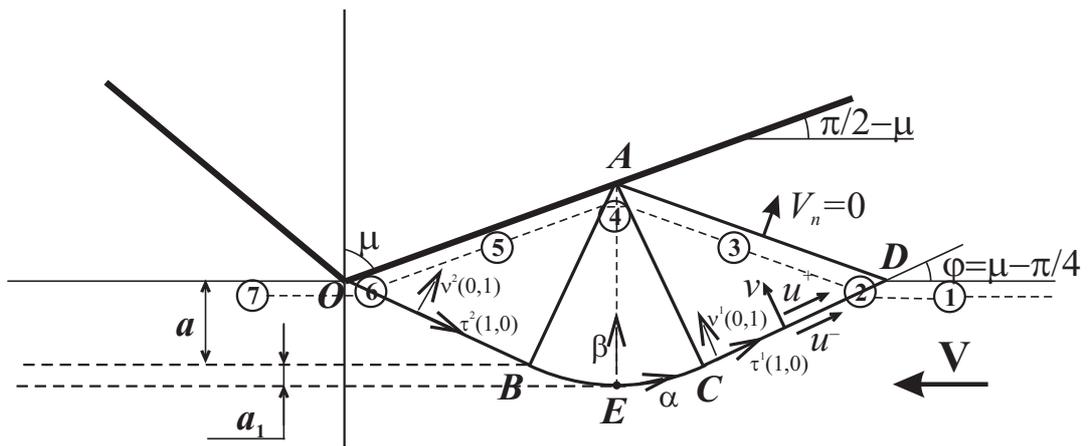


Рисунок 4.5 — Пластическое течение при выглаживании жёсткопластической полуплоскости острым клином

выглаживанием предлагается рассматривать как однократное циклическое нагружение при  $N = 0,5$  и экспериментально определяемом  $\Delta\varepsilon_p$  из технологического процесса, что позволяет использовать формулу (4.5) в виде

$$\Delta\varepsilon_p N^m = M(W_{**}), \quad W_{**} = W_c - W^h, \quad (4.12)$$

где  $W_{**}$  — работа внутренних сил, характеризующая зарождение макротрещины в исходном материале [161];  $W^h$  — работа внутренних сил в поверхност-

ном слое на пластических деформациях, связанных с его упрочнением;  $W_c$  — суммарная работа внутренних сил (4.2), необходимая для разрушения в повреждённом материале.

Предполагается, что обрабатываемый материал является идеальным жёсткопластическим с пределом текучести  $\sigma_S = 2k$ ; пластическое течение является установившимся. При этом геометрия рассматриваемого течения является подобной, поверхность  $OA$  режущего клина и свободная поверхность  $AD$  прямолинейны; переходная поверхность  $OA$  является плоской. Пластическая область  $OABECD$  состоит из двух прямоугольных треугольников  $AOB$  и  $ACD$  с равномерным напряжённым состоянием, соединённых центрированным веером  $ABC$ ; линия  $OBCD$  является жёсткопластической границей. Считается, что материал «набегает» на пластическую область со скоростью  $V$ ; скорости распространения линии  $OBCD$  и прямолинейной поверхности  $OA$  равны нулю.

### 4.3.1 Поля деформаций и диссипация энергии в пластической области

При движении частицы в пластической области выделяются семь участков траектории (см. рисунок 4.5) [32]:

– в недеформированном поверхностном слое (область 1) частица движется со скоростью  $V$ ; тензор дисторсии и тензор Альманси имеют вид (1.31)

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{O};$$

– на жёсткопластической границе 2 частица мгновенно деформируется и рассеивает на пластических деформациях конечную удельную работу внутренних сил

$$W_{CD} = \frac{[V_\tau]}{|V_\nu|};$$

компоненты тензора дисторсии и тензора Альманси в локальной системе  $(\tau^1, \nu^1)$  (см. рисунок 1.5) определяются в виде (1.32):

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W_{CD} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -W_{CD} \\ -W_{CD} & -W_{CD}^2 \end{bmatrix};$$

поле скоростей имеет вид

$$u^- = V \cos\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right), \quad u^+ = -V \sin\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right), \quad v^\pm = V \sin\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right);$$

главные значения тензора Альманси определяются соотношениями (1.33):

$$E_1^{(2)} = \frac{W_{CD}^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{W_{CD}^2}} - 1 \right), \quad E_2^{(2)} = -\frac{W_{CD}^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{W_{CD}^2}} + 1 \right);$$

– в области 3 частица движется вдоль свободной поверхности  $OD$ , не деформируясь; значения компонент тензора дисторсии и тензора Альманси не изменяются:

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{A}^{(2)}, \quad \mathbf{E}^{(3)} = \mathbf{E}^{(2)};$$

– в веере линий скольжения  $ABC$  (область 4) частица движется, деформируясь с максимальной скоростью сдвига  $\gamma_{max}$ , и рассеивает удельную работу внутренних сил (1.15)

$$\frac{W}{2k} = \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) dt;$$

поле скоростей определяется соотношениями

$$u^- = -V \cos \varphi, \quad u^+ = -V \cos \varphi + \sqrt{2}V \cos \mu, \quad v^\pm = V \sin \varphi;$$

где  $\varphi \in \left[ \mu - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} - \mu \right]$ ;

компоненты тензора дисторсии  $\mathbf{A}^{(4)}$  определяются как решение системы дифференциальных уравнений (1.40) при движении центра веера линий скольже-

ния с нулевой скоростью и начальным распределением  $\mathbf{A}_0^{(4)} = \mathbf{A}^{(3)}$ ; компоненты тензора Альманси определяются согласно (1.19) в виде

$$\mathbf{E}^{(4)} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{A}^{(4)} \left( \mathbf{A}^{(4)} \right)^T \right];$$

откуда его главные значения согласно (1.42) равны

$$E_1^{(4)} = e^{(4)} + g^{(4)}, \quad E_2^{(4)} = e^{(4)} - g^{(4)}, \quad (4.13)$$

где  $e^{(4)} = \frac{1}{2} \left( E_{11}^{(4)} + E_{22}^{(4)} \right)$ ,  $g^{(4)} = \frac{1}{2} \sqrt{\left( E_{11}^{(4)} - E_{22}^{(4)} \right)^2 + 4 \left( E_{12}^{(4)} \right)^2}$ ;

– в области 5 частица движется вдоль контактной поверхности  $OA$ , не деформируясь; значения компонент тензора дисторсии и тензора Альманси в локальной системе  $(\tau^2, \nu^2)$  (см. рисунок 1.5) принимают вид

$$\mathbf{A}^{(5)} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{V}^T, \quad \mathbf{E}^{(5)} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}^{(4)} \cdot \mathbf{V}^T,$$

где  $\mathbf{V}$  — матрица перехода от системы  $(\tau^1, \nu^1)$  к системе  $(\tau^2, \nu^2)$ , определяемая согласно (1.38);

– на жёсткопластической границе 6 частица мгновенно деформируется и рассеивает удельную работу

$$W_{OB} = \frac{[V_\tau]}{|V_\nu|};$$

компоненты тензора дисторсии определяются по формуле (1.34)

$$\mathbf{A}^{(6)} = \mathbf{A}^{(5)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ W_{OB} & 1 \end{bmatrix},$$

компоненты тензора Альманси  $\mathbf{E}$  определяются согласно (1.19) в виде

$$\mathbf{E}^{(6)} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{A}^{(6)} \left( \mathbf{A}^{(6)} \right)^T \right],$$

соотношения для определения его главных значений аналогичны (4.13); поле скоростей имеет вид

$$u^- = -V \cos \left( \frac{\pi}{4} - \mu \right), \quad u^+ = V \sin \left( \frac{\pi}{4} - \mu \right), \quad v^\pm = V \sin \left( \frac{\pi}{4} - \mu \right);$$

– в деформированном поверхностном слое (область 7) частица движется со скоростью  $V$ .

Здесь  $u, v$  – проекции скорости перемещения на криволинейные оси  $\alpha, \beta$  соответственно; знаки «+», «–» определяют значения компонент скорости выше и ниже жёсткопластической границы  $OBCD$ ;  $\mu$  – угол режущего клина;  $\varphi$  – угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $x$ . В каждой области нормальная составляющая  $V_\nu$  и разрыв касательной составляющей  $[V_\tau]$  скорости частиц на жёсткопластической границе определяются соотношениями

$$V_\nu^\pm = v^\pm, \quad [V_\tau] = \sqrt{2}V \cos \mu.$$

Отметим, что частицы, траектории которых проходят в окрестности точки  $E$  (см. рисунок 4.5), дважды пересекают линию разрыва  $OBCD$ , не деформируясь в веере. В этом случае компоненты тензора Альманси и его главные значения определяются соотношениями (1.33), (1.37):

– при первом переходе

$$\mathbf{E}^I = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -W \\ -W & -W^2 \end{bmatrix},$$

$$E_1^I = \frac{W^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{W^2}} - 1 \right), \quad E_2^I = -\frac{W^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{W^2}} + 1 \right);$$

– при втором переходе

$$\mathbf{E}^{II} = \begin{bmatrix} 0 & -W \\ -W & -2W^2 \end{bmatrix},$$

$$E_1^{II} = W^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{W^2}} - 1 \right), \quad E_2^{II} = -W^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{W^2}} + 1 \right).$$

Здесь  $W = \frac{[V_\tau]}{|V_\nu|}$  – удельная диссипация энергии на линии  $OBCD$ . В окрестности точки  $E$  однородность деформирования пропадает и существенно зависит от величины нормальной скорости  $V_\nu$  частиц, которая при  $\varphi = 0$  равна

нулю. Это приводит к возрастанию деформаций до критического значения  $E_1 = 0,5$  и к неограниченному возрастанию удельной работы внутренних сил, что, в свою очередь, приводит к нарушению сплошности материала (то есть к разрушению). Это замечание указывает на возможность зарождения макротрещин в подповерхностном слое толщиной  $a_1$  (см. рисунок 4.5).

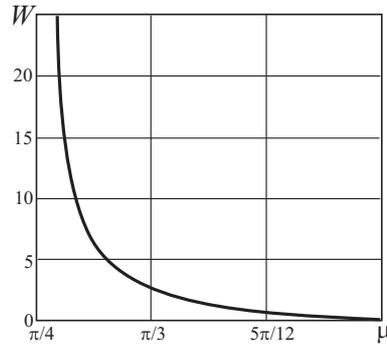


Рисунок 4.6 — Изменение удельной диссипации энергии  $W$  на жёсткопластической границе в зависимости от угла раствора клина  $\mu$

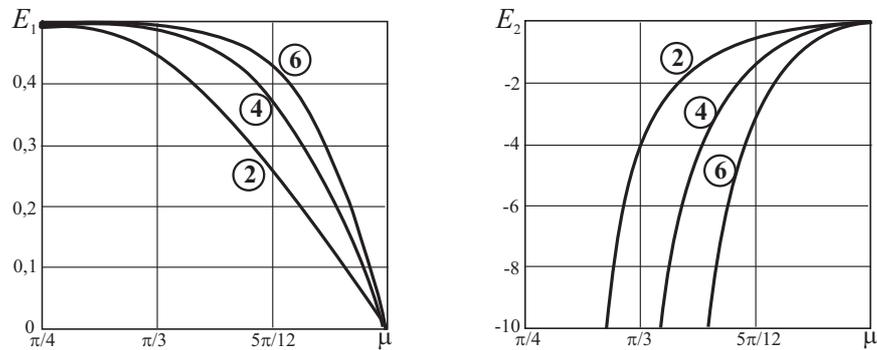


Рисунок 4.7 — Изменения главных значений  $E_1$ ,  $E_2$  тензора конечных деформаций Альманси в зависимости от угла раствора клина  $\mu$

На рисунке 4.6 показано изменение удельной диссипации энергии  $W$  на жёсткопластической границе в зависимости от угла раствора клина  $\mu$ . На рисунке 4.7 показаны изменения главных значений  $E_1$ ,  $E_2$  в зависимости от угла раствора клина  $\mu$  на участках 2, 4, 6 траектории деформирования частицы в пластической области. Участки 2, 4, 6 являются активными участкам

деформирования частицы вдоль траектории. Процессы деформирования на этих участках можно трактовать как полуциклы жесткого деформирования в интервале начальных и конечных деформаций соответствующего этапа. Это означает, что в повреждении материала участвует не вся рассеянная энергия, а только её часть  $W_h$ , связанная с упрочнением. Определение этой части не может быть рассчитано в рамках идеального жёсткопластического тела, но может быть оценено из диаграммы  $\sigma - \delta$  для конкретного материала по вычисленным значениям деформаций.

### 4.3.2 Определение повреждаемости материала в поверхностном слое

Определение части работы внутренних сил, оценивающей повреждённость материала в процессе однократного выглаживания, строится по схеме, представленной на рисунке 4.8 (на примере стали ЭК79).

На рисунке 4.8, (а) показано изменение параметра упрочнения  $|I_E|$  на активных участках траектории деформирования частицы в зависимости от угла  $\mu$  раствора выглаживающего клина (линия 2 — на линии разрыва  $CD$ , линия 4 — в веере  $BAC$ , линия 6 — на участке  $OB$ ). Значение параметра упрочнения определяется по вычисленным в разделе 4.3.1 деформациям:

$$|I_E| = |E_1 + E_2|;$$

На рисунке 4.8, (б) представлена связь параметра упрочнения  $|I_E|$  с относительным удлинением  $\delta$ , определяемого из эксперимента на одноосное растяжении цилиндрического образца. Значение параметра упрочнения определено согласно (1.26):

$$|I_E| = |E_1 + E_2| = -\frac{\delta^2(2 + \delta)^2}{2(1 + \delta)^2};$$

На рисунке 4.8, (в) показана диаграмма нагружения  $\sigma - \delta$  стали ЭК79.

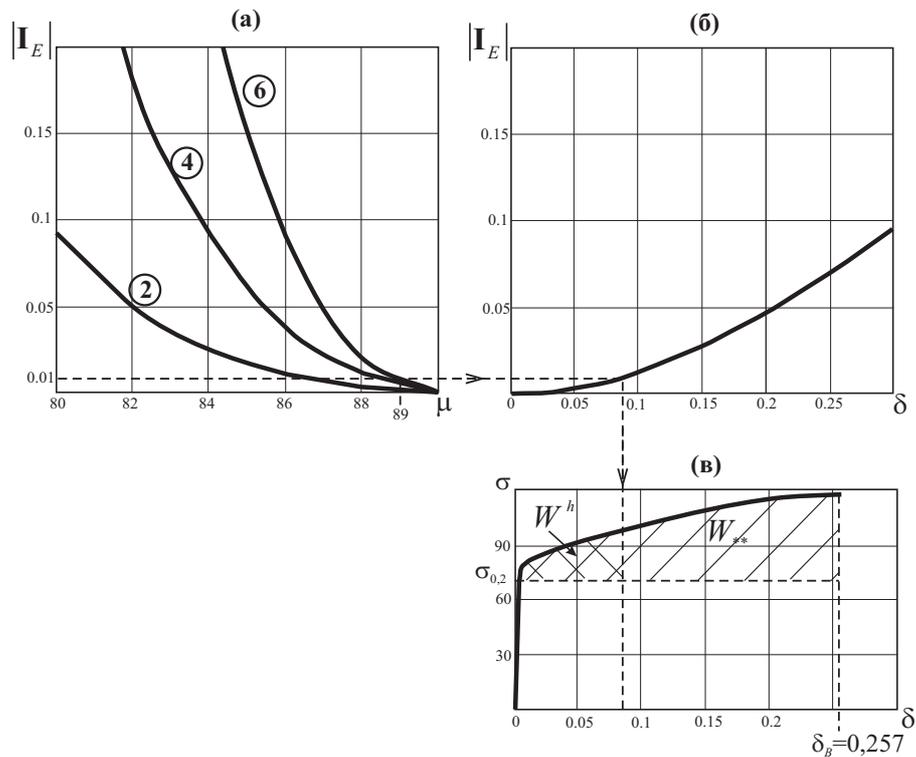


Рисунок 4.8 — Схема определения части работы внутренних сил, определяющей повреждённость материала в процессе выглаживания (на примере стали ЭК79)

Значения диссипации энергии  $W_{**}$ , определяющей зарождение макротрещины в исходном материале, и  $W^h$ , связанной с упрочнением материала, определяются заштрихованными площадями фигуры, ограниченной кривой статической диаграммы  $\sigma - \delta$  и пределом пропорциональности  $\sigma_{0.2}$  для рассматриваемого материала.

Рассеиваемая работа внутренних сил при выглаживании вызывает повреждение и снижает способность материала упрочняться. Согласно (4.12) это приводит к уменьшению величины  $W_{**}$  на величину  $W^h$ , что соответствует уменьшению ресурса упрочнения материала. Согласно предложенной на рисунке 4.8 схеме значения  $W_{**}$  и  $W^h$  определяются по конечным деформациям частицы после пересечения ею пластической области. В рассмотренном примере угол клина принят равным  $\mu = 89^\circ$  и отношение площадей  $\frac{W_{**}}{W^h} \approx 5,6$ . Это означает, что ресурс материала в поверхностном слое при однократном

выглаживании исчерпан на  $\frac{1}{5.6}100\% \approx 17,9\%$ .

#### 4.4 Выводы к четвёртой главе

Предложен подход к описанию предельных состояний пластических тел в пространстве главных напряжений, при котором вместе с поверхностью нагружения, связанной с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела, учитывается эффект Баушингера и конечность деформаций материала. Подход позволяет обобщить соотношения малоциклового усталости на произвольные пространственные процессы деформирования, включая повторно статические нагружения с произвольной формой цикла.

Связь поверхности деформационных состояний и поверхности нагружения предлагается определять на основе гипотезы единой кривой в виде зависимости текущего значения предела текучести материала от параметра упрочнения, в качестве которого выбран модуль первого инварианта тензора конечных деформаций Альманси.

Поведение предложенной в работе поверхности нагружения при упрочнении отличается от традиционных (изотропного и трансляционного). Показано, что с ростом пластических деформаций поверхность расширяется, однако характер упрочнения является неравномерным, что объясняется различием пределов текучести материала при растяжении и сжатии, учитываемого в предложенном условии пластичности.

Определена связь удельной мощности диссипации работы внутренних сил и выбранного параметра упрочнения. Получено конечное соотношение для определения скалярного множителя  $\lambda'$ , связывающего компоненты тензора скорости деформаций с компонентами тензора напряжений согласно ассоциированному закону пластического течения при выбранном в работе усло-

вии пластичности.

Предложен подход к оценке повреждаемости поверхностного слоя на примере задачи о выглаживании жёсткопластической полуплоскости острым клином. Получено распределение деформаций в пластической области, на основе которого предложен метод определения повреждаемости материала в поверхностном слое в виде критического значения удельной работы внутренних сил на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала.

## Глава 5

# Распространение трещины в упругопластическом материале

Существует достаточное число методов исследования процесса распространения трещины в упругопластическом теле, в частности, энергетические методы, основанные на применении инвариантного  $J$ -интеграла.

В работе рассматривается известная схема пластического течения для трещины отрыва (рисунок 5.1). Аналогичная схема пластического течения рассматривается в работе Дж. Райса [140, 207] для математического выреза, где в качестве меры деформации используется «техническая» деформация сдвига (тензор малых деформаций) и при интегрировании тензора скорости деформаций не учитывается изменение конфигурации частиц в окрестности вершины трещины.

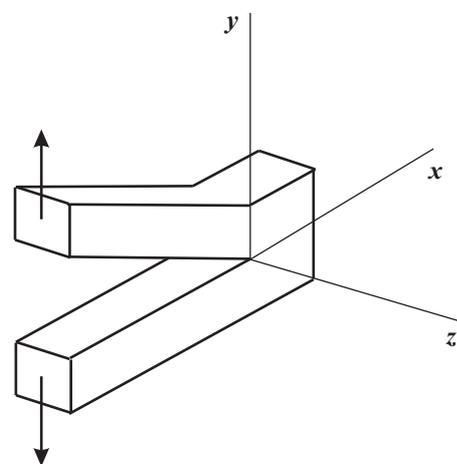


Рисунок 5.1 — Трещина отрыва

В указанной работе Дж. Райса отмечаются и прогнозируются следующие моменты:

- отмечается эффективность использования инвариантного  $J$ -интеграла при решении задачи о трещинах нормального отрыва в упругопластических телах при растяжении в условиях плоского напряжённого состояния и плоской деформации;

- предполагается малость зоны пластического течения по сравнению с характерными геометрическими размерами ("локализованная пластичность"); утверждается, что решение с локализованной пластической зоной около конца трещины является математически строгим лишь в предельном случае ис-

чезающе малой пластической зоны, что однако приводит к решениям весьма близким к точным. Маломасштабное или локализованное пластическое течение отмечается и в работе [153];

- использование не зависящего от пути интеграла оказывается полезным и в случаях, когда имеет место крупномасштабное пластическое течение (путём аппроксимации известных значений);

- отмечается необходимость учитывать конечные деформации вблизи вершины трещины, если необходимо получить точное описание локального состояния, с тем чтобы связать его с исследованием микромеханизмов разрушения;

- отмечается, что желательно было бы иметь критерий разрушения, выраженный через среднее напряжение и путь деформирования для малой области размера характерной микроструктуры, что предполагает отсутствие заметного взаимодействия между континуальными решениями и механизмами разрушения в том смысле, что процессы разрушения не изменят заметным образом рассчитанные поля напряжений и деформаций в областях, превосходящих характерный размер микроструктур.

Указанные замечания в той или иной степени подтверждают основные положения, рассматриваемые в настоящей главе при описании процесса распространения трещины в упругопластическом теле.

В предлагаемой в работе схеме пластического течения учитывается изменение конфигурации частиц, и рассматривается предельная траектория движения частиц в пластической области, что позволяет исключить из рассмотрения особенность поля деформаций в окрестности вершины трещины типа  $\frac{1}{r}$ .

Считается, что материал почти достиг предельного состояния. Это является основанием применения модели идеального жёсткопластического тела для описания процесса распространения трещины. Представляемый резуль-

тат опубликован [40, 41] и получен при условии Мизеса. Учитывая, что новое условие пластичности (3.33) в условиях плоской деформации совпадает с условием Мизеса (см. раздел 3.3.1), представленные результаты будут справедливы и при новом условии пластичности, отличие заключается в определении третьего главного значения тензора напряжения (3.34).

## 5.1 Установившееся движение трещины внутри упругопластического тела

Распространение трещины в упругопластическом теле рассматривается в условиях плоской деформации, при предположении, что материал в окрестности вершины трещины является составным [35, 170, 194], рисунок 5.2. Внешняя часть области, окружающая вершину трещины является упругой, напряжённно-деформированное состояние в ней может быть определено известными численными методами. Внутренняя часть, ограниченная контуром  $ACDBEFGA$  является жёсткопластической, где деформации являются конечными и могут быть описаны аналитически тензорами конечных деформаций. Характер составного тела не противоречит, в частности, рассматриваемым в [103] моделям зарождения и распространения трещины в окрестности концентраторов напряжений, где предполагается, что процесс происходит в результате пластического деформирования и последующего разрушения микрообласти в окрестности вершины концентратора, окружённой упруго деформирующимся материалом. В работе [154] отмечается, что «... локализованные пластические деформации могут возникать при нагружении детали, содержащей надрез», и «независимо от способа приложения внешней нагрузки, ... пластическая деформация в области у вершины трещины определяется напряжённным состоянием, обусловленным воздействием окружающего упругого материала».

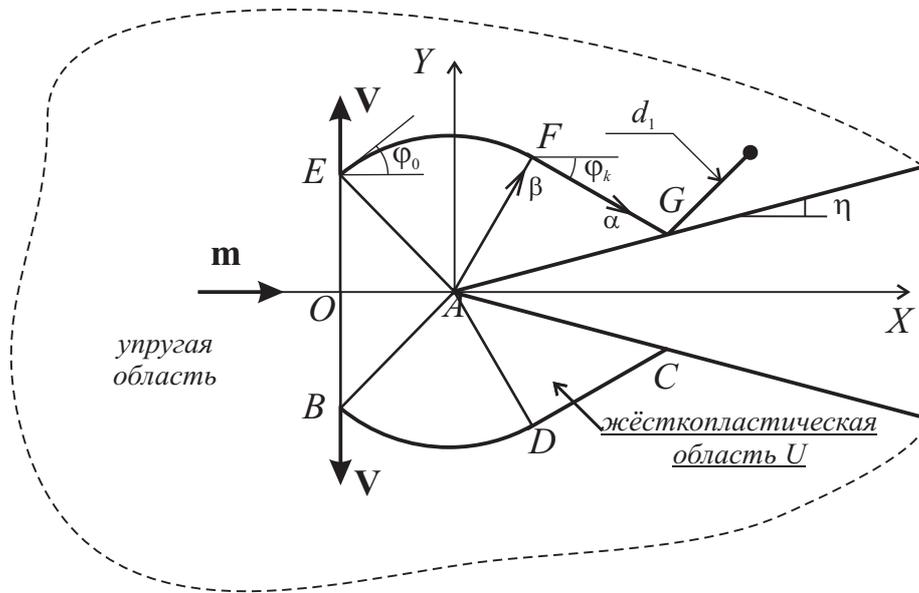


Рисунок 5.2 — Схема пластического течения в окрестности вершины трещины

При решении задачи вводятся следующие предположения:

- напряжённно-деформированное состояние во внешней упругой области определяется с помощью известных численных методов, в частности, при использовании пакетов ANSYS, MSC и др.;
- деформации во внутренней жёсткопластической области  $U$ , имеющей границу  $ACDBEFGA$ , имеют большие (конечные) значения, и описываются аналитически тензорами конечных деформаций (см. раздел 1.3);
- свободная поверхность трещины, примыкающая к жёсткопластической области, прямолинейна;
- пластическое течение является установившимся, и область  $U$  сохраняет свои размеры со временем, начало системы координат связано с вершиной трещины (точка  $A$ );
- материал внешней области «набегаёт» на область  $U$  вдоль оси  $X$  со скоростью  $m > 0$ ;
- скорость частиц вдоль оси  $Y$  на линии  $BOE$  изменяется линейно (от 0 до значения  $V$ ) аналогично известному решению О. Ричмонда (раздел 2.3.2);

и совпадает со скоростями в задаче об одноосном однородном растяжении полосы с непрерывным полем скоростей перемещений [172];

– частицы выше линии  $EFG$  (ниже  $BDC$ ) движутся со скоростью  $V_Y = V$  ( $V_Y = -V$ ), что определяет распределение нормальных скоростей на этих линиях;

– поле скоростей в веере линий скольжений  $EAF$  имеет вид

$$u = V \left( \frac{R}{a} + \sin \varphi - \sqrt{2} \right) - m \cos \varphi, \quad v = V \cos \varphi + m \sin \varphi, \quad (5.1)$$

где  $u, v$  — проекции скорости перемещения на криволинейные оси  $\alpha, \beta$  в системе координат  $XAY$ , связанной с вершиной трещины;  $a = OA$  — характерный размер пластической области;  $\varphi$  — угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $X$ ;  $R$  — радиус кривизны линий скольжения семейства  $\alpha$ . Аналогично строится полей скоростей для веера  $BAD$ .

Вводимые предположения тем точнее, чем меньше размеры жёсткопластической области.

В отличие от решения О. Ричмонда (см. раздел 2.3.2) гипотеза об установившемся пластическом течении позволяет не учитывать вращение свободных поверхностей границы трещины, и предполагает сохранение угла раскрытия трещины для образующихся при её распространении элементов свободной поверхности. Данное замечание позволяет связать величины скоростей распространения трещины  $m$  и растяжения полосы  $V$  соотношением

$$m = V \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}.$$

Отметим, что данная модель является приближённой, поскольку распределение касательных скоростей со стороны жёсткопластической области  $U$  на линии  $EFG$  определяется по нормальным скоростям однозначно, однако оно не совпадает с распределением касательных скоростей для внешней упругой задачи. Указанное различие может привести к разрыву  $[V_\tau]$  касательных

компонент скоростей перемещений на участке контура  $EFG$ . Величина  $[V_T]$  не подчиняется уравнениям теории идеального жёсткопластического тела и изменяется от 0 (в точке  $O$ ) до значения  $V$  (в точке  $E$ ). При уменьшении жёсткопластической области эта «невязка» будет стремиться к нулю, так как поле скоростей является непрерывным как в упругой, так и в жёсткопластической областях.

### 5.1.1 Распределение работы внутренних сил в окрестности вершины трещины

Рассмотрим подробно траекторию движения частиц в окрестности вершины трещины, и определим удельную работу внутренних сил вдоль этой траектории.

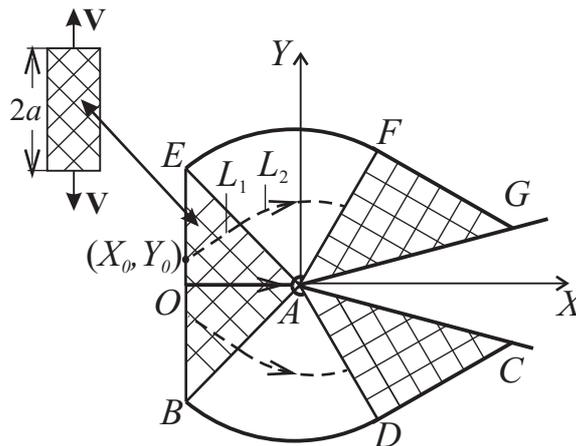


Рисунок 5.3 — Напряжённо-деформированное состояние и траектории движения частиц в окрестности вершины трещины (точка  $A$ ): заштрихованные области – области однородного поля деформирования

Траектория движения  $L$  частицы в пластической области состоит из двух участков (рисунок 5.3): прямолинейного участка  $L_1$  в однородном поле деформирования (область  $EAB$ ) и криволинейного участка  $L_2$  в веере характеристик  $EAF$  ( $BAD$ ); при этом начальное положение частицы определяется точкой её входа в пластическую область  $(X_0, Y = Y_0)$ . Разрушаться

будут частицы, которые попадают в вершину трещины, причём необходимо рассматривать траекторию в нижней и верхней частях пластической области. Отметим, что в отличие от течения в окрестности вершины  $V$ -образного выреза, рассматриваемого далее в разделе 5.2, частица пересекает пластическую область «слева-направо», при этом линия  $AE$  не является линией разрыва поля скоростей перемещений.

Предполагается, что две бесконечно близкие частицы расходятся на конечное расстояние с течением времени, рисунок 5.4 (см. раздел 2.5); то есть разрушается не область, а частицы в окрестности вершины трещины.

Согласно соотношениям раздела 1.2.2 удельная работа внутренних сил, произведённая частицей вдоль траектории её движения, определяется выражением вида (1.15)

$$\frac{W}{2k} = \int_L \gamma_{max} dt = \int_{L_1} \gamma_{1max} dt_1 + \int_{L_2} \gamma_{2max} dt_2,$$

где согласно (1.14) и (1.25)

$$\gamma_{1max} = \frac{V}{a}, \quad \Delta t_1 = \frac{a}{m},$$

$$\gamma_{2max} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right) - \frac{1}{S} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} - v \right), \quad dt_2 = \frac{Rd\varphi}{u}.$$

Здесь  $R, S$  — радиусы кривизны линий скольжения  $\alpha, \beta$ ;  $\alpha, \beta$  — криволинейные координаты, связанные с соответствующими линиями скольжения;  $\varphi = \alpha + \beta$ ; величина  $\Delta t_1$  отнесена к предельной траектории ( $Y_O \rightarrow 0$ ), совпадающей с отрезком  $OA = a$ .

Рассмотрим траектории частиц, проходящих в верхней части пластической области через веер  $EAF$  (аналогично рассматриваются траектории для

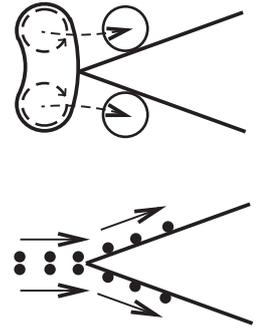


Рисунок 5.4 — Схема движения частиц в окрестности вершины распространяющейся трещины

нижней части пластической области). Здесь радиус кривизны  $\alpha$ -линии принимает отрицательное значение ( $R < 0$ ). Выполняя переход к определённом интегралу; предполагая, что линии  $\beta$  являются прямыми ( $S \rightarrow \infty$ ), и переходя к пределу в начальных условиях  $Y_O \rightarrow 0$ , получаем предельные значения для определения удельной работы внутренних сил вдоль предельной траектории  $OA$ :

$$\int_{L_1} \gamma_{1max} dt_1 = \int_{L_1} \frac{V}{a} dt = \frac{V}{a} \Delta t = \frac{V}{m}, \quad \int_{L_2} \gamma_{2max} dt_2 = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right) \frac{d\varphi}{u}.$$

Следовательно, общая энергия, необходимая для доведения материала до предельного состояния и дальнейшего распространения трещины определяется выражением

$$\frac{W}{2k} = \frac{V}{m} - 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u}. \quad (5.2)$$

При этом первое слагаемое естественно отнести к первому этапу разрушения (зарождение трещины). Второе (удвоенное) слагаемое определяет, сколько энергии необходимо для образований верхней и нижней частей свободной поверхности. Знак «-» перед интегралом соответствует отрицательному значению радиуса кривизны  $R$ . На рисунке 5.5 представлено изменение накопленной диссипации работы внутренних сил  $\frac{W}{2k}$  после прохождения частицей веера линий скольжения в зависимости от угла раскрытия трещины  $\eta$ . Наличие максимума на данной кривой объясняется наличием двух противодействующих параметров: угла раскрытия веера  $\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_0$  и времени нахождения частицы в веере, определяемого скоростью  $m = V \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}$ .

Заметим, что именно рассматриваемая в работе предельная траектория движения частиц, состоящая из отрезка  $OA$  и бесконечно малой дуги в окрестности точки  $A$ , позволяет получить распределение диссипации энергии в окрестности вершины трещины аналитически в виде (5.2).

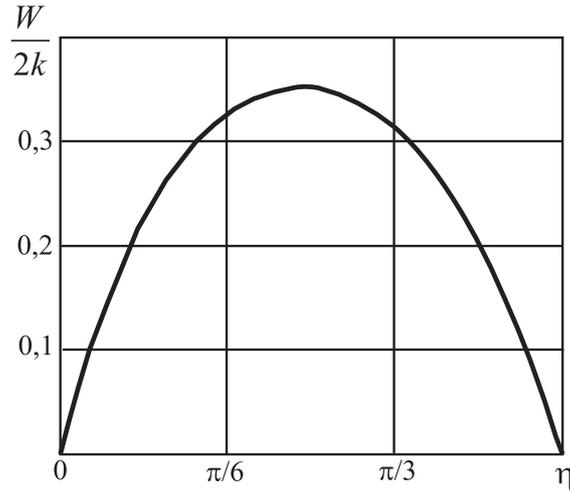


Рисунок 5.5 — Зависимость накопленной диссипации энергии  $\frac{W}{2k}$  от угла раскрытия трещины  $\eta$

### 5.1.2 Поле деформации в окрестности вершины трещины

В связи с рассмотрением пластического течения распределение деформаций в окрестности вершины трещины представляет определённый интерес. Как правило, считается, что деформации в окрестности вершины трещины имеют особенность  $\frac{1}{r}$ . В рамках теории идеального жёсткопластического тела задача определения поля деформаций решается также аналитически при рассмотрении деформирования частицы вдоль предлагаемой предельной траектории. Перепишем систему уравнений (1.20) в виде

$$\frac{dE_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} - E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} - E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i}.$$

Интегрирование этого соотношения вдоль траектории  $L = L_1 + L_2$  определяет распределение деформаций в частице:

$$E_{ij} = E_{ij}^{(1)} + E_{ij}^{(2)} = \int_{L_1} \frac{E_{ij}}{dt} dt + \int_{L_2} \frac{E_{ij}}{dt} dt, \quad (5.3)$$

где индексы «(1)», «(2)» отнесены соответственно к частям траектории  $L_1$ ,  $L_2$ .

Первый интеграл в (5.3) определяет накопление деформаций в однородном поле тензора скоростей деформаций, совпадающее с соответствующим полем в задаче об одноосном однородном растяжении полосы (см. раздел 1.3.1), в виде решения системы уравнений (1.24)

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} + 2g\gamma &= 0, \\ \frac{dg}{dt} + 2\gamma \left( e - \frac{1}{2} \right) &= 0,\end{aligned}$$

где  $\gamma = \frac{V}{a}$ . Предполагаем, что частица до входа в жёсткопластическую область не деформировалась, то есть при  $t = 0$  начальные значения  $e = g = 0$ . Интегрируя эту систему уравнений вдоль предельной траектории движения частицы (отрезок  $OA$ ) при  $t \in \left[ 0, \frac{a}{m} \right]$ , получим, что при  $t = \frac{a}{m}$  поле деформаций в точке  $A$  определяется в виде

$$\begin{aligned}e &= \frac{-(1 - \exp(2b))^2}{4 \exp(2b)}, & g &= \frac{-(1 - \exp(4b))}{4 \exp(2b)}; \\ E_1 = e + g &= \frac{1}{2} (1 - \exp(-2b)), & E_2 = e - g &= \frac{1}{2} (1 - \exp(2b)),\end{aligned}\tag{5.4}$$

где  $b = \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}$ .

Переход во втором интеграле (5.3) к интегрированию в полярных координатах  $(r, \varphi)$ , учитывая, что  $S \rightarrow \infty$  и  $Y_0 \rightarrow 0$ , показывает, что радиус кривизны семейства  $\alpha$ -линий стремится к нулю для всех точек участка траектории  $L_2$  ( $R \rightarrow 0 \forall \varphi \in L_2$ ). Это замечание следует из ограниченности поля скоростей перемещений в пластической области (5.1). Определение поля деформаций в веере  $EAF$  вдоль предельной траектории ( $Y_0 \rightarrow 0$ ) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.40):

$$\begin{aligned}\frac{de}{d\alpha}f + g \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ \frac{dg}{d\alpha}f + \left(e - \frac{1}{2}\right) \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ 2g\frac{d\theta}{d\alpha}f - \left(e - \frac{1}{2}\right) \sin 2(\theta - \psi) - g &= 0,\end{aligned}$$

где  $f = \frac{u - m \cos \varphi}{\partial v / \partial \varphi + u}$ ,  $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \eta - \frac{\pi}{4}\right]$  — угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $X$ . Определённые в (5.4) значения  $e$ ,  $g$  принимаются начальными для этой системы уравнений. На рисунке 5.6 представлено изменение деформаций в окрестности вершины трещины (точка  $A$ ) в зависимости от угла  $\eta$  раскрытия трещины с учётом деформирования в области  $EAB$  вдоль отрезка  $OA$ . Штриховой линией показаны начальные значения деформаций в веере на линии  $AE$ , полученные в однородном поле деформирования, сплошной линией — конечные значения деформаций на линии  $AF$ , полученные при движении частицы в веере  $EAF$ .

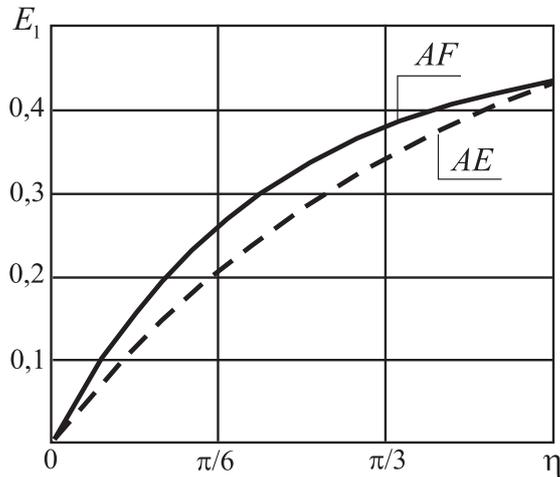


Рисунок 5.6 — Зависимость деформаций (первого главного значения тензора Альманси  $E_1$ ) от угла раскрытия трещины  $\eta$

### 5.1.3 Пластический $J$ -интеграл

Известно, что закон сохранения механической энергии для объёма  $U$  сплошной среды с единичной глубиной  $d_1$  по нормали к плоскости  $XU$  определяется равенством [105]

$$\int_{\Sigma} V_i t_i^{(n)} dS + \int_U \rho b_i V_i dU = \frac{dK}{dt} + \int_U \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dU, \quad (5.5)$$

где  $V_i$  — поле скоростей;  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$  — компонента вектора напряжения;  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжения;  $\varepsilon_{ij} = (V_{i,j} + V_{j,i})/2$  — тензор скорости деформации;  $\rho$  — плотность;  $b_i$  — массовые силы;  $K$  — кинетическая энергия;  $\Sigma$  — граница объёма сплошной среды  $U$ . В случае квазистатического процесса без учёта массовых сил для несжимаемого тела соотношение (5.5) устанавливает связь между мощностями внешних и внутренних сил в виде

$$\int_{\Sigma} V_i t_i^{(n)} d\Sigma = \int_U \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dU. \quad (5.6)$$

Проинтегрировав (5.6) по времени  $t$ , получим связь работ внешних и внутренних сил, определяемую выражением

$$\underbrace{\int_0^t \left( \int_{\Sigma} V_i t_i^{(n)} d\Sigma \right) dt}_{\delta\Gamma} = \int_0^t \left( \int_U \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dU \right) dt, \quad (5.7)$$

где  $\delta\Gamma$  — энергия, затрачиваемая на образование новой поверхности тела (в виде приращения поверхности трещины) за время  $t$ , за которое длина трещины получает приращение  $\delta l$ . Разделим обе части выражения (5.7) на приращение длины трещины  $\delta l$ :

$$\frac{1}{\delta l} \int_0^t \left( \int_{\Sigma} V_i t_i^{(n)} d\Sigma \right) dt = \frac{1}{\delta l} \int_0^t \left( \int_U \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dU \right) dt. \quad (5.8)$$

Переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$  ( $\delta l \rightarrow 0$ ) в левой части (5.8), получим величину  $\frac{\delta \Gamma}{\delta l}$ , вычисляемую на основе распределений  $V_i, t_i^{(\mathbf{n})}$  по контуру  $CDBEFG$ . Если поле скоростей  $V_i$  и вектор напряжений  $t_i^{(\mathbf{n})}$  определяются из решения внешней (упругой) задачи, то

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta l} = J$$

где  $J$  — инвариантный интеграл. Если величины  $V_i, t_i^{(\mathbf{n})}$  вычисляются на основе теории идеального жёсткопластического тела, то получаем величину, так называемого пластического интеграла:

$$J_p = \frac{\delta \Gamma}{\delta l} = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\delta l} \int_0^t \left( \int_{\Sigma} V_i t_i^{(\mathbf{n})} d\Sigma \right) dt. \quad (5.9)$$

При этом контур  $\Sigma$  стягивается в точку  $A$  при условии  $OA = \delta l$ , оставаясь подобным упругопластической границе.

Отметим, что величина  $J_p$ , вообще говоря, не соответствует обычно рассматриваемому  $J$ -интегралу, так как инвариантность последнего доказана только в рамках деформационной теории пластичности, [140]. Разность между этими интегралами может быть оценена выражением

$$|J - J_p| \leq \left| \frac{\delta \Pi}{\delta l} \right| + \left| \frac{\delta}{\delta l} \left( 2 \int_{EFG} [V_\tau] k ds \right) \right|,$$

где  $\Pi$  — неучтённая потенциальная упругая энергия, которая могла содержаться в жёсткопластической области. Рассмотрим отдельно слагаемые в правой части последнего неравенства. При стягивании контура  $CDBEFG$  в точку  $A$  объем жёсткопластической области  $U$  будет стремиться к нулю быстрее, чем линейный размер  $\delta l$ , поэтому первое слагаемое  $\left| \frac{\delta \Pi}{\delta l} \right|$  стремится к нулю. Касательные компоненты скорости  $V_\tau^+, V_\tau^-$  являются непрерывными функциями в упругой и жёсткопластической областях, соответственно. Очевидно, что  $V_\tau^+ = V_\tau^-$  в точках  $E$  и  $B$ , поэтому величина разрыва  $[V_\tau] = V_\tau^+ - V_\tau^-$

также стремится к нулю при стягивании контура в точку  $A$ , и следовательно второе слагаемое также будет стремиться к нулю. Отсюда следует, что при стягивании контура  $CDBEFG$  в точку  $A$  величина  $|J - J_p| \rightarrow 0$ . Учитывая данное замечание, примем

$$J_p \approx J. \quad (5.10)$$

При этом рассеяние работы внутренних сил в конечной жёсткопластической области не учитывается (то есть не учитывается неинвариантность  $J$ -интеграла в жёсткопластической области).

Далее рассмотрим отдельно выражение в правой части соотношения (5.8). Положим  $OA = \delta l = a$  (рисунок 5.3), что соответствует минимальному по размеру контуру, охватывающему вершину трещины при изменении её длины на величину  $\delta l = m \cdot t$ . Учитывая, что внутренний интеграл по области  $U$  не зависит от времени  $t$ , получим:

$$\frac{1}{\delta l} \int_0^t \left( \int_U \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dU \right) dt = \frac{1}{m} \int_U \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dU. \quad (5.11)$$

Жёсткопластическая область  $U$  состоит из пяти частей: прямоугольных треугольников  $AFG$ ,  $EAB$ ,  $ADC$ , в которых реализуется однородное поле деформирования, и центрированных вееров  $EAF$ ,  $BAD$ . Подынтегральное выражение имеет сингулярность типа  $\frac{1}{r}$  только в веерах. Ранее было показано, что диссипативная функция  $W = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}$  в однородном поле деформирования и центрированном веере определяется согласно (1.25) и (1.14) выражениями

$$W = \frac{V}{a} 2k, \quad W = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) 2k.$$

Учитывая, что для треугольников  $dU = a^2 d_1$ , для вееров  $dU = R dR d\varphi d_1$  (где  $d_1$  — единичная глубина объёма), интеграл (5.11) будет равен

$$\frac{1}{m} \int_U \varepsilon_{ij} \sigma_{ji} dU = \frac{3Va}{m} \cdot 2k \cdot d_1 + \frac{4\sqrt{2}k \cdot d_1}{m} \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi. \quad (5.12)$$

При стягивании контура  $G'F'E'O'B'D'C'$  в точку  $A$  ( $O'A = a' \rightarrow 0$ ) из соотношения (5.8), учитывая (5.9) и (5.12), имеем

$$J_p = \frac{4\sqrt{2}k \cdot d_1}{m} \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi. \quad (5.13)$$

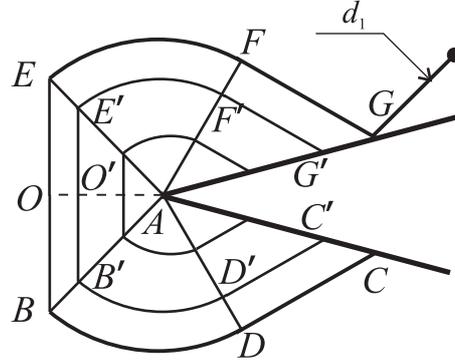


Рисунок 5.7 — Предельный переход: стягивание контура пластической области в точку  $A$

Отметим, что соотношение (5.13) верно для малых пластических областей. Если эта область достаточно велика и трещина распространяется с постоянной скоростью  $m$ , то вместо величины  $J_p$  естественно использовать интеграл по всей жёсткопластической области  $U$  (без стягивания контура  $\Sigma$  в точку  $A$ ) и считать, что

$$\frac{J}{2k} \approx \frac{3Va}{m}d_1 + \frac{2\sqrt{2}d_1}{m} \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi. \quad (5.14)$$

Знак приближённого равенства предполагает наличие «невязки»  $[V_\tau]$  и неучёт потенциальной упругой энергии в области  $U$ .

В [153] показана связь значения  $J$ -интеграла с раскрытием трещины  $\delta_k$  для тонкой пластины из идеальнопластического материала:

$$J = \sigma_S \delta_k, \quad (5.15)$$

которая выполняется при условии пластичности Треска, где  $\sigma_S = 2k$  — предел текучести при растяжении. Определим связь введённого пластического

интеграла  $J_p$  с  $\delta_k$ -моделью разрушения в случае предельной траектории движения частиц в пластической области, когда справедливо (5.10), и для малых углов раскрытия трещины  $\eta$ . При рассмотрении предельной траектории поле скоростей частиц в окрестности вершины трещины определяется в виде

$$u = V(\sin \varphi - \sqrt{2}) - m \cos \varphi, \quad v = V \cos \varphi + m \sin \varphi, \quad \varphi \in \left[ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \eta \right].$$

Откуда

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u = -\sqrt{2}V.$$

Тогда согласно (5.13) значение пластического интеграла при  $\sigma_S = 2k$  и  $m = V \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}$  будет равно

$$J_p = 4\sigma_S \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \eta \right) d_1.$$

Для полученной функции линейное приближение

$$J_p(\eta) = J_p(\eta_0) + J_p'(\eta_0)(\eta - \eta_0)$$

относительно  $\eta_0 = 0$  имеет вид

$$J_p(\eta) = \pi\sigma_S\eta d_1.$$

Тогда равенство (5.15) будет выполняться при

$$\delta_k = \pi\eta d_1.$$

Данное соотношение определяет связь  $\delta_k$ -модели разрушения с углом раскрытия трещины  $\eta$  в предлагаемом в работе подходе, которая будет иметь место в случае предельной траектории движения частиц в пластической области и при малом угле раскрытия трещин.

#### 5.1.4 Связь удельной работы внутренних сил $W$ и пластического $J$ -интеграла

Выражение (5.13) предлагается использовать для определения критического значения диссипации энергии  $W_*$ , которую необходимо добавить в мате-

риал для распространения трещины, по критическому значению  $J$ -интеграла  $J^*$ , определяемого из эксперимента. Согласно (5.2) и (5.13) соотношение между этими критическими величинами определяется выражением

$$\frac{J_p^*}{W_*} = -\frac{2\sqrt{2}d_1}{m} \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u}}. \quad (5.16)$$

Это соотношение справедливо для плоских и цилиндрических образцов для случая, когда при одноосном растяжении отсутствует чётко выраженная «шейка». В этом случае алгоритм определения величины  $W_*$  по основным геометрическим характеристикам материала из эксперимента на одноосное растяжение образца (см. раздел 2.4) не может быть реализован.

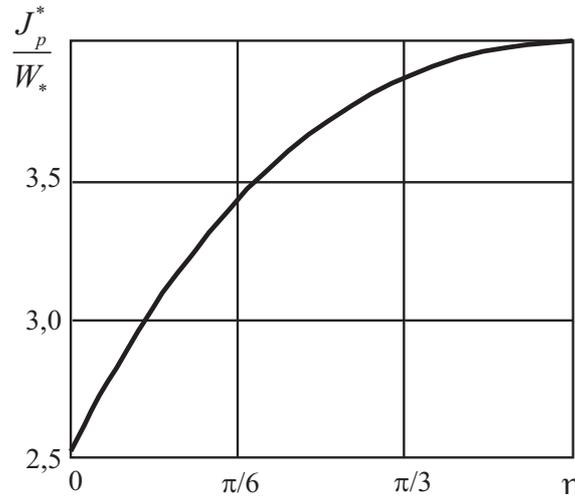


Рисунок 5.8 — Зависимость предельного значения величины  $\frac{J_p^*}{W_*}$  от угла раскрытия трещины  $\eta$

На рисунке 5.8 представлена зависимость предельного значения величины  $\frac{J_p^*}{W_*}$  от угла раскрытия трещины  $\eta$ .

Как и для (5.13), выражение (5.16) имеет место для малых пластических областей. Если пластическая область имеет конечные размеры и трещина распространяется с постоянной скоростью  $\mathbf{m}$ , то согласно (5.2) и (5.14) соот-

ношение между критическими значениями диссипации энергии и  $J$ -интеграла должно определяться выражением:

$$\frac{J_p}{W} = \frac{3Va + 2\sqrt{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi}{V - 2m \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u}} d_1,$$

которое может быть использовано для определения характерного размера пластической области  $a$ , необходимого для доведения материала до предельного состояния при движении частицы вдоль предельной траектории с последующим её разрушением в верхнем и нижнем веерах линий скольжения при установившемся режиме распространения трещины.

Отметим, что описание процесса образования двух новых свободных поверхностей при разрушении возможно только при наличии в пластической области двойной особой точки поля скоростей перемещений (в рассмотренной задаче два центра веера характеристик  $EAF$  и  $BAD$  совпадают в вершине трещины (точка  $A$ )).

## 5.2 Неустойчивое движение углового выреза внутри упругопластического тела

В разделе 2.3 анализируются возможные схемы пластического течения в окрестности  $V$ -образного выреза при одноосном растяжении полосы, позволяющие описать процессы как зарождения, так и распространения трещины.

Что считать началом развития трещины? При каких условиях вырез остаётся таковым, или в какой момент вырез можно считать острой трещиной? Возможно ли пластическое течение в окрестности углового выреза без разрушения (без образования новых свободных поверхностей, как при разрушении, см. раздел 5.1)? Будет ли при этом сохраняться конфигурация выреза

или пластическое течение без разрушения в окрестности вершины углового выреза возможно только при его «затуплении»?

На рисунке 5.9 показано возможное несимметричное движение частиц материала в окрестности вершины  $V$ -образного выреза. Частицы перемещаются с одной стороны выреза на другую, что соответствует смещению углового выреза вверх или вниз. При таком движении разрушение материала (нарушение сплошности) не представляется возможным, то есть частицы материала не выходят на свободную поверхность. Подобная несимметричная схема пластического течения при растяжении жёсткопластической полосы с

$V$ -образным вырезом рассматривается в разделе 2.3.3, и справедлива без разрушения для углов выреза  $\eta > 52,362^\circ$ . Однако в отличие от течения с разрушением (см. рисунок 5.2) частица материала пересекает пластическую область «справа-налево» (при нахождении в пластическом состоянии верхней полуплоскости, рисунок 5.10): первоначально частица деформируется в веере  $EAF$  и далее испытывает дополнительные пластические деформации на линии разрыва  $AE$  поля скоростей перемещений.

Удельная работа внутренних сил при этом определяется через сумму значений в веере  $W_{EAF}$  и на линии разрыва  $W_{AE}$  согласно (1.18) и (1.11):

$$\frac{W_{EAF}}{2k} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u}, \quad \frac{W_{AE}}{2k} = \frac{[V_\tau]}{2(G + V_n)},$$

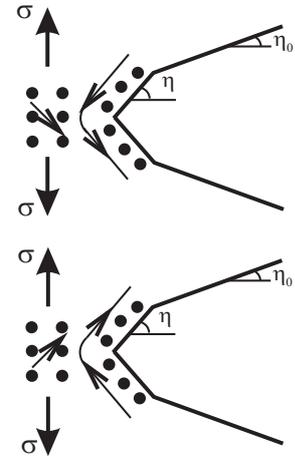


Рисунок 5.9 — Движение частиц в окрестности вершины  $V$ -образного выреза без разрушения:  $\eta_0, \eta$  — начальный и текущий угол раствора выреза

где  $[V_\tau]$ ,  $V_n$  — касательная и нормальная составляющая скорости частицы на линии разрыва;  $G$  — нормальная скорость распространения линии  $AE$ ;  $u$ ,  $v$  — проекции скорости перемещения частиц в пластической области на линии  $\alpha$ ,  $\beta$ . Согласно результатам, полученным в разделе 2.3.3, суммарная диссипация

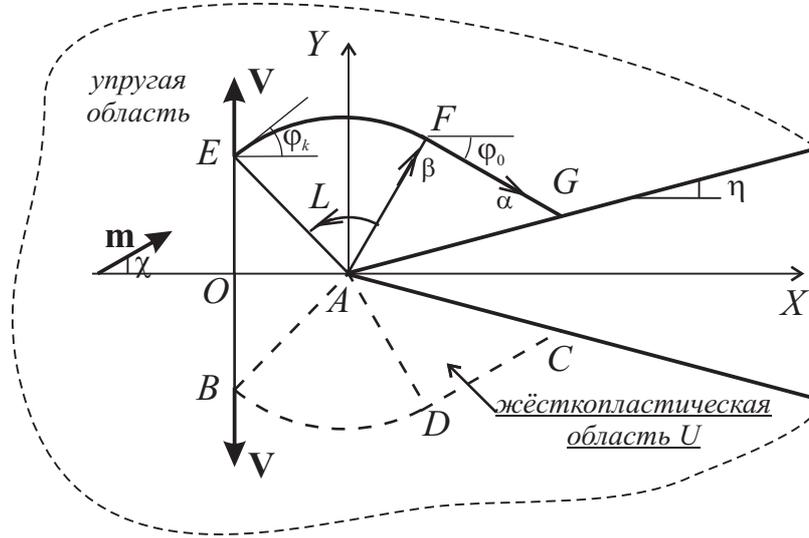


Рисунок 5.10 — Схема пластического течения в окрестности вершины V-образного выреза без разрушения

энергии для рассматриваемого пластического течения определяется выражением:

$$\frac{W}{2k} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u} + \frac{[V_\tau]}{2(G + V_n)}, \quad (5.17)$$

где

$$u = V \left( \sin \varphi - \sqrt{2} \right) - (m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi),$$

$$v = V \cos \varphi + (m_x \sin \varphi - m_y \cos \varphi),$$

$$[V_\tau] = \sqrt{2}, \quad G = \frac{m_x + m_y}{\sqrt{2}}, \quad V_n = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$m_x = \frac{1 + \cos \eta}{\sin(\chi - \eta)} \cos \chi$ ,  $m_y = \frac{1 + \cos \eta}{\sin(\chi - \eta)} \sin \chi$  — компоненты скорости «набега-ния» материала на вершину выреза.

Аналогичные результаты получаются для случая, когда в пластическом состоянии находится нижняя часть полуплоскости (пунктирная линия на рисунке 5.10).

### 5.3 Выводы к пятой главе

Предложена модель установившегося пластического течения в окрестности вершины распространяющейся трещины на основе модели идеального жёсткопластического тела, при условии, что материал почти достиг предельного состояния. Окрестность вершины трещины представлена составной: внешняя часть является упругопластической, где напряжённо-деформированное состояние определяется численными методами; внутренняя область — жёсткопластическая, что позволяет определять распределение деформаций и диссипации энергии аналитически. Предложенная модель учитывает изменение конфигурации частиц материала в пластической области, и при переходе к предельной траектории движения частиц в пластической области позволяет исключить из рассмотрения особенность поля диссипации энергии в окрестности вершины трещины. Получены распределения деформаций и удельной диссипации энергии в пластической области. На основе закона сохранения энергии определён пластический интеграл, значение которого в предельном случае стремится к значению традиционного инвариантного  $J$ -интеграла. Полученную зависимость между удельной работой внутренних сил и пластическим  $J$ -интегралом предложено использовать для определения критического значения энергии, необходимой для распространения трещины, по критическому значению  $J$ -интеграла, определяемого из эксперимента.

Отмечено, что описание процесса образования двух новых свободных поверхностей при разрушении возможно при наличии в пластической области двойной особой точки поля скоростей перемещений (в частности, в виде сов-

падения двух центров вееров линий скольжения в вершине трещины). Это условие обеспечивает расхождение на конечное расстояние двух бесконечно близких частиц перед вершиной трещины, которые деформируются по двум предельным траекториям в окрестности центров вееров линий скольжения.

Предложена модель неустановившегося пластического течения, позволяющая описать процесс затупления углового выреза, при несимметричном пластическом течении, когда частицы перемещаются с одной стороны выреза на другую. При этом нарушения сплошности материала (разрушение) не происходит.

# Заключение

Предложенный в работе подход позволяет описать процесс разрушения как совокупность процессов достижения материалом предельного состояния и распространения трещины с единых позиций, даёт новые методы расчёта модельных и прикладных задач теории пластического течения и механики разрушения. Основные результаты работы определяются следующими положениями:

1. Сформулированы задачи, моделирующие процессы деформирования и разрушения материала в рамках теории пластического течения. Под разрушением понимается нарушение сплошности среды (нарушение непрерывности отображения конфигурации материальных частиц); при непрерывном пластическом течении две бесконечно близкие частицы всегда остаются бесконечно близкими.

2. Показано, что в теории пластического течения заложена модель разрушения, учитывающая изменение тензоров конечных деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений.

3. Сформулированы критерии разрушения материала при пластическом течении. При этом процесс разрушения необходимо рассматривается как совокупность процессов доведения материала до предельного состояния (зарождение макротрещины) и распространения макротрещины, что следует из экспериментального наблюдения процессов разрушения образцов.

4. Определена единая критериальная величина достижения материалом предельного состояния и условия распространения трещины. В качестве критериальной величины принята удельная работа внутренних сил.

5. Сформулирован подход к описанию предельных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела. Подход основан на гипотезе С. В. Серенсена об исчерпании пластичности материала, из которого следу-

ет, что предельное состояние связано с предельным упрочнением материала или предельным условием пластичности. Предложенное условие пластичности связывается со взаимным расположением сечений поверхности деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела и поверхностью нагружения.

6. Установлена связь новой критериальной величины с традиционными критериями механики разрушения (инвариантный  $J$ -интеграл,  $\delta_k$ -модель разрушения).

7. Сформулированы задачи приложения рассматриваемого подхода к вопросам технологической и эксплуатационной наследственности и её влияния на трещиностойкость элементов конструкций.

**Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.** Полученные на основе теории пластического течения результаты существенно расширяют область приложения механики разрушения. В дальнейшем развитии темы результаты работы определяют направления, связанные с описанием момента зарождения трещины в упругопластических материалах; исследованием областей локализации пластических деформаций, являющихся, как правило, источником развития трещин, но представляющих в настоящее время дискуссионный характер; исследованием влияния технологических процессов и эксплуатационной наследственности на приближение материала к предельному состоянию, связанных с различными деформационными процессами (механическая обработка деталей конструкций, повреждение материала при различных ударных воздействиях при эксплуатации и другие).

Перспективным представляется использование аналитических результатов при реализации численных расчётов для различных деформационных процессов, связанных с пластическим деформированием. В частности, внедрение предложенного подхода в пакеты программ численного расчёта типа MSC, ANSYS.

## Список литературы

1. Авиационные материалы: справочник в девяти томах (изд. 6-е, перераб. и дополн.) // Под ред. А. Т. Туманова. Т.1. Конструкционные стали. М.: ОНТИ, 1975.
2. Александров С. Е., Гольдштейн Р. В. Расчёт толщины стенки трубопровода под внутренним давлением при произвольном законе упрочнения // Деформация и разрушение материалов. 2011. № 9. С. 15–20.
3. Александров С. Е., Гольдштейн Р. В. Исследование процесса осадки трёхслойной жёсткопластической полосы между параллельными плитами // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2014. № 6. С. 120–131.
4. Александров С. Е., Лямина Е. А. Решение задачи о расширении и растяжении полого цилиндра с использованием градиентной теории пластичности // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 186–192.
5. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985.
6. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983.
7. Бородий М. В. Анализ экспериментальных данных малоциклового усталости при непропорциональном деформировании // Проблемы прочности. 2000. № 1. С. 13–21.
8. Брок Д. Основы механики разрушения / Пер. с англ. Москва: Высшая школа, 1980.

9. Буханько А. А. Контактные задачи и концентраторы деформаций. Деформация и разрушение: Кандидатская диссертация / ИМиМ ДВО РАН. 2003.
10. Буханько А. А. Задача о предельном равновесии для упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела // Актуальные проблемы математики и механики: материалы и доклады Всерос. науч. конф., посвященной 75-летию со дня рождения д-ра физ.-мат. наук, профессора Г. И. Быковцева. Самара: Издательство «Самарский университет», 2013. С. 39–40.
11. Буханько А. А. Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, для различных процессов деформирования // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. № 9–2(110). С. 43–54.
12. Буханько А. А. Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, и особенности его приложения в теории идеальной пластичности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 1(30). С. 199–206.
13. Буханько А. А., Григорьева А. Л., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационно-энергетический критерий разрушения жёсткопластических тел // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2009. № 6. С. 178–186.
14. Буханько А. А., Каминская Е. С., Хромов А. И. Удельная диссипация энергии в окрестности фронта трещины при осесимметричном деформировании // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды

- восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2011. С. 63–66.
15. Буханько А. А., Ключник О. В., Кочеров Е. П. Упрощённая схема деформирования цилиндрического образца при одноосном растяжении до разрушения // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2011. С. 66–69.
16. Буханько А. А., Козлова О. В., Хромов А. И., Степанов С. Л. Разрушение пластических тел. Константы разрушения // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 28. Модели механики сплошной среды. Материалы XVII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2004. С. 54–62.
17. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Овчинникова С. А. Методика оценки влияния обработки поверхности выглаживанием на малоцикловую усталость материала // Самолётостроение России. Проблемы и перспективы: материалы симпозиума с международным участием. Самара: СГАУ, 2012. С. 96–98.
18. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Овчинникова С. А. Методика оценки влияния поверхностной обработки на малоцикловую усталость материала // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2012. № 5(36). С. 92–96.

19. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Самойлов В. А. Адиабатическое распределение диссипации энергии в окрестности центра веера характеристик // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2009. № 2(19). С. 252–256.
20. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Критерии разрушения пластических тел // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2010. С. 78–81.
21. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Пластические критерии разрушения // Тезисы докладов VII Международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвящённой 110-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2010. С. 87.
22. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Разрушение пластических тел // Сборник трудов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», посвящённой 80-летию Д. Д. Ивлева. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2010. С. 80–84.
23. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационно-энергетический подход в моделировании процессов зарождения и распространения трещин // Ресурс и диагностика материалов и конструкций. Тезисы V Российской научно-технической конференции. Екатеринбург: ИМаш УрО РАН, 2011. С. 74.

24. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационно-энергетический подход к оценке прочности элементов конструкций // Труды международной конференции «Живучесть и конструкционное материаловедение». Т. 1. Москва: ИМАШ РАН, 2012. С. 46–55.
25. Буханько А. А., Лошманов А. Ю. Математическое моделирование полей деформаций в пластических течениях с разрывным полем скоростей перемещений // Фундаментальные и прикладные вопросы механики. Материалы Всероссийской конференции, посвящённой 70-летию академика В.П. Мясникова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2006. С. 31–33.
26. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Расчёт полей деформаций в задачах обработки материалов давлением при наличии особенностей поля скоростей перемещений // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2006. № 9. С. 22–27.
27. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Обобщение теорий пластического течения и малоциклового усталости на механику разрушения // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела: в 2 т. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. С. 115–119.
28. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Предельные состояния пластических тел // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий: сб. ст. по мат-лам междунар. научн.-практ. конф.: в 2 ч. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. С. 37–42.
29. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Предельные состояния пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогиче-

- ского университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3(17). С. 94–102.
30. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Разрушение пластических тел и теория пластического течения // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Сборник тезисов докладов международной научной конференции. Одесса: Астропринт, 2013. С. 33–34.
31. Буханько А. А., Овчинникова С. А. Аналитическая аппроксимация пластической области при скольжении цилиндра по жёсткопластическому полупространству // Успехи механики сплошных сред: Сборник докладов Международной конференции, приуроченной к 75-летию академика В. А. Левина. Иркутск: ООО «Мегапринт», 2014. С. 68–71.
32. Буханько А. А., Овчинникова С. А., Чостковская О. П. Поля деформаций в задаче о выглаживании жёсткопластической поверхности угловым индентором // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2013. С. 63–67.
33. Буханько А. А., Патлина О. В. Затупление углового выреза в жёсткопластической полосе // Успехи механики сплошных сред: Тезисы Всероссийской конференции, приуроченной к 70-летию академика В. А. Левина. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 79–80.
34. Буханько А. А., Патлина О. В., Хромов А. И. Растяжение жёсткопластической полосы с угловыми вырезами // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Междуна-

- родной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2009. С. 78–80.
35. Буханько А. А., Степанов С. Л., Хромов А. И. Растяжения полосы с V-образными вырезами и разрушение пластических тел // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2007. № 3. С. 177–186.
36. Буханько А. А., Хромов А. И. Поля деформаций при внедрении клинообразных и плоских штампов // Дальневосточный математический журнал. 2002. Т. 3, № 2. С. 311–319.
37. Буханько А. А., Хромов А. И. Удельная диссипация энергии и локальный критерий разрушения пластических тел // Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Т. 1. Ереван: ЕГУАС, 2010. С. 151–154.
38. Буханько А. А., Хромов А. И. Удельная диссипация энергии как характеристика разрушения пластических тел // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: Тезисы докладов VI Всероссийской конференции. Екатеринбург: ИМаш УрО РАН, 2010. С. 124.
39. Буханько А. А., Хромов А. И. Пластические критерии разрушения и их связь с инвариантным J-интегралом // Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления», посвящённая 75-летию со дня рождения академика В. П. Мясникова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2011. С. 31–32.
40. Буханько А. А., Хромов А. И. Пластическое течение в вершине трещины, деформации и энергетический критерий разрушения // Доклады Академии наук. 2012. Т. 442, № 3. С. 333–336.

41. Буханько А. А., Хромов А. И. Пластическое течение в окрестности вершины трещины. Энергетический критерий разрушения и его связь с J-интегралом // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 6. С. 112–120.
42. Буханько А. А., Хромов А. И. Удельная диссипация энергии как критерий разрушения пластических тел // VII Российская научно-техническая конференция «Механика микронеоднородных материалов и разрушение». Тезисы докладов. Екатеринбург: ИМаш УрО РАН, 2012. С. 129.
43. Буханько А. А., Хромов А. И. Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, и особенности его приложения в теории идеальной пластичности // Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы конф. Самара: СамГТУ, 2012. С. 78–79.
44. Буханько А. А., Хромов А. И. Энергетическое условие развития пластического течения, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. С. 68–71.
45. Буханько А. А., Хромов А. И., Степанов С. Л. Разрушение пластических тел в окрестности концентраторов деформаций // Зимняя школа по механике сплошных сред (четырнадцатая). Тезисы докладов. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. С. 49.
46. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1961. № 1. С. 173–174.

47. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
48. Быковцев Г. И., Хромов А. И. Плоская деформация идеальных жёстко-пластических тел с учётом изменения границы // Известия Академии наук СССР. Механика твёрдого тела. 2002. № 2. С. 71–78.
49. Бьюи Х. Д. Механика разрушения: обработные задачи и решения / Пер. с англ. Л. В. Степановой. Москва: Физматлит, 2011.
50. Волков В. М., Миронов А. А. Объединённая модель образования и роста усталостных трещин в концентраторах напряжений // Проблемы прочности и пластичности. 2005. № 67. С. 20–25.
51. Волков И. А., Коротких Ю. Г., Тарасов И. С. Численное моделирование накопления повреждений при сложном пластическом деформировании // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 1. С. 5–18.
52. Волков И. А., Коротких Ю. Г., Тарасов И. С. Численный анализ процессов сложного пластического деформирования конструкционных сталей при малоцикловом нагружении // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4, № 1. С. 17–24.
53. Волков И. А., Тарасов И. С., Ереев М. Н. Уравнения состояния упруго-пластических сред с повреждениями и их реализация в задачах усталостной долговечности конструкций при малоцикловом нагружении // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. 2011. № 4(5). С. 2085–2087.
54. Гениев Г. А., Киссюк В. Н., Тюпин Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона. Москва: Стройиздат, 1974.

55. Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений // Теория пластичности. Сб. ст. под ред. Ю. Н. Работнова. М.: ИЛ. 1948. С. 114–135.
56. Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах // Теория пластичности. Сб. ст. под ред. Ю. Н. Работнова. М.: ИЛ. 1948. С. 80–101.
57. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. Москва: Наука, 1978.
58. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Общая теория критериев прочности изотропных и анизотропных материалов // Проблемы прочности. 1971. № 2. С. 65–69.
59. Гольдштейн Р. Ф., Морозов Н. Ф. Фундаментальные проблемы механики деформируемого твёрдого тела в наукоёмких технологиях // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15, № 2. С. 5–13.
60. Гомонова О. В., Сенашов С. И. Новые точные решения, описывающие двумерное поле скоростей для решения Прандтля // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнёва. 2009. № 4. С. 18–21.
61. Демешкин А. Г., Карпов Е. В., Корнев В. М. Малоцикловая усталость образцов с краевой трещиной из сталей с разными степенями предварительного деформирования // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12, № 3. С. 91–99.
62. Демешкин А. Г., Корнев В. М., Кургузов В. Д. Зарождение трещин в окрестности концентраторов напряжений в квазихрупких материалах //

- Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2012. № 1. С. 110–121.
63. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. / Под ред. Р. В. Гольдштейна. Москва: Мир, 1990.
64. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров / Пер. с англ. Москва: Машиностроение, 1979.
65. Друянов Б. А., Непершин Р. И. Теория технологической пластичности. Москва: Машиностроение, 1990.
66. Егорова Ю. Г., Каверзина С. А., Хромов А. И. Резание и разрушение идеальных жёсткопластических тел // Доклады Академии наук. 2002. Т. 385, № 4. С. 490–493.
67. Зубчанинов В. Г. Математическая теория пластичности. Тверь: ТГТУ, 2002.
68. Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. Москва: Физматлит, 2007.
69. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1996.
70. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. Москва: Физматлит, 2001.
71. Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Непершин Р. И. и др. Предельные состояния деформируемых тел и горных пород. Москва: Физматлит, 2008.
72. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Учёные записки МГУ. Механика. 1946. № 117. С. 90–108.

73. Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. В 2-х т. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. Москва: Наука, 1986.
74. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2003.
75. Казаков Д. А., Капустин С. А., Коротких Ю. Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. Н. Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 1999.
76. Каминская Е. С., Буханько А. А. Пластическое течение в окрестности вершины трещины в условиях осесимметричной деформации // Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления», посвящённая 75-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2011. С. 39–40.
77. Капустин С. А., Горохов В. А., Пантелеев В. Ю., Чурилов Ю. А. Численное моделирование процессов зарождения и развития трещин на основе соотношений механики повреждённой среды // Проблемы прочности и пластичности. 2009. № 71. С. 36–44.
78. Карпенко Н. И., Круглов В. М., Соловьев Л. Ю. Нелинейное деформирование бетона и железобетона. Новосибирск: СГУПС, 2001.
79. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969.
80. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. Москва: Наука, 1974.
81. Кирпичёв В. А., Павлов В. Ф., Чирков А. В., Иванова А. В. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых цилиндри-

- ческих образцов различного диаметра // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2012. № 5-1(36). С. 100–107.
82. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Об одной форме определяющих соотношений математической теории пластичности (течение на ребре призмы Кулона-Треска) // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 6(65). С. 260–280.
83. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Трёхмерные определяющие соотношения теории идеальной пластичности и течение на ребре призмы Кулона-Треска // Известия Российской Академии наук. Механика твёрдого тела. 2010. № 2. С. 171–188.
84. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлом давлением. Учебник для вузов. Москва: Металлургия, 1986.
85. Колмогоров В. Л., Богатов А. А., Мигачев Б. А., и др. Пластичность и разрушение. Москва: Металлургия, 1977.
86. Корнев В. М. Двухмасштабная модель малоциклового усталости. Переход от квазивязкого разрушения к хрупкому // Деформация и разрушения материалов. 2008. № 2. С. 2–12.
87. Корнев В. М. Диаграммы квазихрупкого разрушения тел с иерархией структур при малоциклового нагружении // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14, № 5. С. 31–45.
88. Корнев В. М., Кургузов В. Д. Зона предразрушения в квазихрупких материалах при ветвлении и изломе трещин // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12, № 2. С. 27–35.

89. Корнев В. М., Кургузов В. Д. Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряжённого состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51, № 6. С. 153–163.
90. Кочеров Е. П., Буханько А. А. Зарождение усталостной трещины в окрестности углового выреза // Проблемы и перспективы развития двигателестроения: материалы докладов междунар. науч.-техн. конф. В 2 ч. Ч. 2. Самара: СГАУ, 2011. С. 249–250.
91. Кочеров Е. П., Буханько А. А., Хромов А. И. Деформационно-энергетический подход и малоцикловая усталость материалов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2011. № 3-1. С. 23–27.
92. Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационные состояния и разрушение идеальных жёсткопластических тел // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2006. № 42. С. 66–71.
93. Ламашевский В. П., Кучер В. Н. Влияние вида напряженного состояния на деформирование и прочность стали 20Х25Н20С2 // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія Машинобудування. 2010. № 58. С. 165–170.
94. Ломакин Е. В. Механика сред с зависящими от вида напряжённого состояния свойствами // Физическая мезомеханика. 2007. Т. 10, № 5. С. 41–52.
95. Ломакин Е. В., Мельников А. М. Пластическое плоское напряжённое

- состояние тел, свойства которых зависят от вида напряжённого состояния // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 2. С. 48–64.
96. Ломакин Е. В., Федулов Б. Н. Пластическое деформирование полос из материала с зависящими от вида напряжённого состояния свойствами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54). С. 263–279.
97. Лошманов А. Ю., Буханько А. А. Прошивка жёсткопластической полосы // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2006. С. 136–139.
98. Лямина Е. А. Сравнительный анализ влияния вида градиентного члена на поведение пластических решений // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 2. С. 65–73.
99. Макклиток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. Москва: Мир, 1970.
100. Марченко В. М. Теория пластического течения с ориентированной поверхностью нагружения // Учёные записки ЦАГИ. 1976. Т. VII, № 5. С. 98–107.
101. Марченко В. М. Теория пластического течения с ориентированной поверхностью нагружения // Учёные записки ЦАГИ. 1976. Т. VII, № 6. С. 79–89.
102. Марченко В. М. Вывод уравнения поверхности нагружения в теории

- пластического течения, опирающейся на учёт эффекта Баушингера // Учёные записки ЦАГИ. 1978. Т. IX, № 2. С. 127–131.
103. Матвиенко Ю. Г. Модели и критерии механики разрушения. Москва: Физматлит, 2006.
104. Махутов Н. А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Т. 1: Критерии прочности и ресурса. Новосибирск: Наука, 2005.
105. Мейз Д. Теория и задачи механики сплошных сред. Москва: Мир, 1974.
106. Митенков Ф. М., Зверев Д. Л., Кайдалов В. Б. и др. Основные положения механики повреждённой среды и их реализация для обоснования прочности и долговечности ядерных энергетических установок // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15, № 1. С. 87–93.
107. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. Москва: Наука, 1984.
108. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1954.
109. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. Новосибирск: Гео, 2009.
110. Непершин Р. И. О качении и скольжении цилиндра по идеальнопластическому полупространству с учётом контактного трения // Доклады Академии наук. 2002. Т. 383, № 3. С. 346–349.
111. Непершин Р. И. Качение и скольжение цилиндра по границе идеально пластического полупространства // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. С. 326–335.

112. Непершин Р. И. Скольжение эллиптического цилиндра по границе идеально-пластического полупространства // Проблемы механики: Сборник статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. Москва: Физматлит, 2003. С. 582–592.
113. Непершин Р. И. Качение и скольжение жёсткого цилиндра по границе жёсткопластического полупространства // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2004. № 3. С. 101–115.
114. Непершин Р. И. Поверхностное пластическое деформирование скользящим инструментом // Упрячняющиеся технологии и покрытия. 2010. № 6. С. 19–22.
115. Непершин Р. И. Пластическое деформирование поверхностного слоя при качении и скольжении жёсткого цилиндра // Трение и износ. 2013. Т. 34, № 3. С. 272–276.
116. Нотт Д. Ф. Основы механики разрушения / Пер. с англ. Д. В. Лаптева / Под ред. В. Г. Кудряшова. Москва: Металлургия, 1978.
117. Одквист Ф. Упрочнение стали и ей подобных материалов // Теория пластичности. Сборник статей под ред. Ю. Н. Работнова. М.: ИЛ. 1948. С. 283–290.
118. Павлов В. Ф., Кирпичёв В. А., Вакулюк В. С. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых деталей по остаточным напряжениям. Самара: Самарский научный центр РАН, 2012.
119. Павлов В. Ф., Кирпичёв В. А., Вакулюк В. С., Сазанов В. П. Влияние поверхностного упрочнения на предел выносливости цилиндрических деталей различного диаметра // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2012. № 3. С. 79–80.

120. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. Москва: Наука, 1985.
121. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения: Основы механики разрушения. Москва: ЛКИ, 2007.
122. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения: Специальные задачи механики разрушения. Москва: ЛКИ, 2008.
123. Патлина О. В., Буханько А. А. Затупление углового выреза // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2009. С. 194–196.
124. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. О форме предельной поверхности механического критерия прочности // Прикладная механика. 1968. Т. 4, № 3. С. 45–50.
125. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии. Киев: Наукова думка, 1976.
126. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С., Антипов Е. А. Сопротивление жаропрочных материалов стационарным силовым и температурным воздействиям. Киев: Наукова думка, 1974.
127. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С., Антипов Е. А. Пластичность и прочность материалов при нестационарных нагружениях. Киев: Наукова думка, 1984.
128. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Издательство Дельта, 2008.

129. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения / Под ред. Г. Либовица. Москва: Мир, 1975. С. 336–520.
130. Проблемы механики: Сборник статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. Москва: Физматлит, 2003.
131. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. Москва: Наука, 1979.
132. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения. Москва: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2009.
133. Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2007.
134. Радаев Ю. Н. О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке // Известия Российской Академии наук. Механика твёрдого тела. 2008. № 5. С. 79–89.
135. Радаев Ю. Н. О достижимой нижней границе трёхмерного инварианта Кулона-Треска // Известия Российской Академии наук. Механика твёрдого тела. 2012. № 6. С. 87–94.
136. Радаев Ю. Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2012. № 5(56). С. 102–114.
137. Радаев Ю. Н. Об одной достижимой оценке снизу трёхмерного инварианта напряжений Кулона-Треска системами «двухмерных» касательных напряжений // Вестник Чувашского государственного педагогического

- университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4(14). С. 3–16.
138. Радченко В. П., Кирпичёв В. А., Лунин В. В. Влияние обкатки роликом на остаточные напряжения и сопротивление усталости образцов из стали 40ХН // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2013. № 1(37). С. 142–150.
139. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Феноменологический метод расчёта остаточных напряжений и пластических деформаций в полем поверхностно упрочнённом цилиндрическом образце // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, № 1. С. 143–152.
140. Райс Д. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения / Под ред. Г. Либовица. Москва: Мир, 1975. С. 204–335.
141. Саушкин М. Н., Радченко В. П., Куров А. Ю. Метод расчёта остаточных напряжений в надрезах с полукруглым профилем в полем поверхностно упрочнённом цилиндрическом образце // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 4. С. 150–157.
142. Сегал В. М. Технологические задачи теории пластичности (методы исследования). Минск: Наука и техника, 1977.
143. Сенашов С. И. Пластические течения среды Мизеса со спирально-винтовой симметрией // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, № 1. С. 150–154.
144. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчёты деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие. Москва: Машиностроение, 1975.

145. Серенсен С. В., Шнейдерович Р. М., Махутов Н. А. и др. Поля деформаций при малоцикловом нагружении. Москва: Наука, 1979.
146. Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969.
147. Соловьев Л. Ю. Нелинейная модель бетона на основе теории пластического течения // Системы. Методы. Технологии. 2014. № 4(24). С. 131–140.
148. Соппротивление материалов деформированию и разрушению: Справочное пособие: в 2-х ч. / Под ред. В. Т. Трощенко. Киев: Наук.думка, 1993.
149. Степанова Л. В. Математические методы механики разрушения. Москва: ООО Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2009.
150. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах: Пер. с англ. / Под ред. Л. М. Качанов. Москва: Мир, 1964.
151. Трощенко В. Т., Лебедев А. А., Стрижало В. А., др. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения. Киев: Логос, 2000.
152. Хаар А., Карман Т. К теории напряжённых состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. Сборник статей под ред. Ю. Н. Работнова. М.: ИЛ. 1948. С. 41–56.
153. Хеллан К. Введение в механику разрушения: Пер. с англ. Москва: Мир, 1988.
154. Херцберг Р. В. Деформация и механика разрушения конструкционных

- материалов / Пер. с англ. / Под ред. М. Л. Берштейна, С. П. Ефименко. С.П.–М.: Металлургия, 1989.
155. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Москва: Гостехтеоретиздат, 1956.
156. Хромов А. И. Деформация и разрушение жёсткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996.
157. Хромов А. И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жёсткопластических тел // Доклады Академии наук. 1998. Т. 362, № 2. С. 202–205.
158. Хромов А. И. Деформация и разрушение жёсткопластической полосы при растяжении // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2002. № 1. С. 136–142.
159. Хромов А. И. Деформация и разрушение жёсткопластических тел, константы разрушения // Проблемы механики: Сборник статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. Москва: Физматлит, 2003. С. 762–775.
160. Хромов А. И., Буханько А. А., Козлова О. В. Локализация пластических деформаций и концентраторы деформаций // Современные проблемы механики и прикладной математики: сборник трудов международной школы-семинара. Ч. 1, т. 2. Воронеж: ВГУ, 2004. С. 513–516.
161. Хромов А. И., Буханько А. А., Козлова О. В., Степанов С. Л. Пластические константы разрушения // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 147–155.

162. Хромов А. И., Буханько А. А., Кочеров Е. П. Деформационные состояния и разрушение жёсткопластических тел // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Материалы съезда. Нижний Новгород: 2006. С. 50.
163. Хромов А. И., Буханько А. А., Кочеров Е. П. Деформационно-энергетический подход к описанию процессов разрушения пластических тел // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4(4). С. 1839–1840.
164. Хромов А. И., Буханько А. А., Лошманов А. Ю. Течение жёсткопластического материала по каналу постоянной высоты с круговым изгибом и угловой точкой // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2006. № 1(48). С. 147–150.
165. Хромов А. И., Буханько А. А., Овчинникова С. А. Предельное состояние и малоцикловая усталость пластических материалов // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, № 1. С. 148–158.
166. Хромов А. И., Буханько А. А., Патлина О. В. Деформационно-энергетические критерии и разрушение пластических тел в окрестности концентраторов деформаций // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2008. С. 342–345.
167. Хромов А. И., Буханько А. А., Патлина О. В., Кочеров Е. П. Растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2008. № 1(16). С. 53–58.

168. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Концентраторы деформаций и деформационные критерии разрушения // Тезисы докладов VI международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвящённой 105-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2005. С. 177.
169. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Разрушение пластических тел // Сборник трудов международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики». Воронеж: 2005. С. 191–192.
170. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Концентраторы деформаций // Доклады Академии наук. 2006. Т. 407, № 6. С. 777–781.
171. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Концентраторы деформаций и разрушение пластических тел // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сборник статей к 75-летию Е. И. Шемякина. Москва: Физматлит, 2006. С. 809–819.
172. Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жёсткопластических тел. Константы разрушения. Владивосток: Дальнаука, 2005.
173. Хромов А. И., Кочеров Е. П., Григорьева А. Л. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жёсткопластического тела // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2006. № 43. С. 88–91.
174. Хромов А. И., Кочеров Е. П., Григорьева А. Л. Деформационные состо-

- яния и условия разрушения жёсткопластических тел // Доклады Академии наук. 2007. Т. 413, № 4. С. 481–485.
175. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. Москва: Наука, 1983.
176. Шацкий А. Н., Буханько А. А. Численно-аналитический метод моделирования пластического течения при расчёте элементов конструкций с повреждениями типа угловых вырезов // Проблемы и перспективы развития двигателестроения: материалы докладов междунар. науч.-техн. конф. В 2 ч. Ч. 2. Самара: СГАУ, 2011. С. 247–249.
177. Эрдоган Ф., Кобаяси А., Атлури С. и др. Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. / Под ред. С. Атлури. Москва: Мир, 1990.
178. Bardet J. P. Lode Dependences for Isotropic Pressure-Sensitive Elastoplastic Materials // Journal of Applied Mechanics. 1990. Vol. 57. P. 498–506.
179. Bishop J. F. W. On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1953. Vol. 2, no. 1. P. 43–53.
180. Bukhanko A. A., Loshmanov A. Y., Khromov A. I. Limiting states of plastic materials // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014), 22–28 September 2014, Rhodes, Greece. Vol. 1648. American Institute of Physics, 2015.
181. Bukhanko A. A., Ovchinnikova S. A. Approximation of the plastic zone by circular arcs during the sliding of a cylinder on the rigid-plastic half-space // Proceedings of 2014 International Conference on Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (MEACS 2014), Tomsk. IEEE, 2014.

182. Coffin L. F. A study of the effects of cyclic thermal stresses in ductile metals // Transaction of ASME. 1954. Vol. 76. P. 931–950.
183. Experimental and Numerical Investigation of Advanced Materials and Structures / Ed. by A. Öchsner, H. Altenbach. Springer International Publishing, 2013. Vol. 41 of Advanced Structured Materials.
184. Feltner C. E., Morrow J. D. Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture // Basic Engineering. Transaction of ASME. 1961. Vol. 83, no. 1. P. 15–22.
185. Irwin G. R., Kies J. A. Fracturing and fracture dynamics // Welding Journal. 1952. Vol. 31. P. 95s–100s.
186. Khromov A., Bukhanko A., Kocherov E., Fedorchenko D. Deformation States and Fracture Characteristics of Plastic Materials // 1st International Congress on Microreliability and Nanoreliability in Key Technology Applications. Berlin: 2007. P. 120.
187. Khromov A., Bukhanko A., Kocherov E., Fedorchenko D. Deformation States and Fracture of Plastic Bodies // ICF Interquadrennial Conference. Fracture Mechanics in Design of Fracture Resistant Materials and Structures. Book of Abstract. Moscow: MAX Press, 2007. P. 49–51.
188. Khromov A. I., Bukhanko A. A. Strain-Energy Criteria and Fracture of Plastic Bodies in a Neighborhood of Strain Concentrators // XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book. 2008. P. 245.
189. Khromov A. I., Bukhanko A. A. Plastic Flow at a Crack Tip. Energy Fracture Criterion and its Relation to the J-Integral // ESMC-2012 – 8th European Solid Mechanics Conference. Book of Abstracts [CD-ROM]. 2012.

190. Khromov A. I., Bukhanko A. A., Kocherov E. P., Fedorchenko D. G. Deformation and Fracture of Plastic Bodies in a Neighborhood of Strain Concentrators // Assessment of Reliability of Materials and Structures: Problems and Solutions: Proceedings of the Intern. Conference. SPb.: Polytechnic University Publishing, 2008. P. 162–165.
191. Khromov A. I., Bukhanko A. A., Patlina O. V. The problem of Blunting of an Angular Notch (Crack Tip) // Proceedings of the 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference. 2009. P. 57–58.
192. Khromov A. I., Bukhanko A. A., Stepanov S. L. Concentrators of deformations and fracture of plastic bodies // Third International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering. Book of abstract. Ghent, Belgium: 2005.
193. Khromov A. I., Bukhanko A. A., Stepanov S. L., Kocherov E. P. Fracture of plastic bodies. Deformation concentrators // Proceedings of the 16th European Conference of Fracture. Alexandroupolis, Greece: 2006. P. 125.
194. Khromov A. I., Bukhanko A. A., Stepanov S. L., Kocherov E. P. Concentrators of deformations and fracture of plastic bodies // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. Vol. 215, no. 2. P. 457–466.
195. Khromov A. I., Bukhanko A. A., Stepanov S. L. et al. Fracture of materials at localization of plastic strains and his multilevel character // International Symposium on Developments in Plasticity and Fracture Centenaty of M.T. HUBER Criterion. Cracow, Poland: 2004. P. 38–39.
196. Kolupaev V. A., Bolchoun A. Combined yield and fracture criteria (in German: Kombinierte Fließ- und Grenzbedingungen) // Forschung im Ingenieurwesen. 2008. Vol. 72, no. 4. P. 209–232.

197. Kolupaev V. A., Bolchoun A., Altenbach H. Yield Criteria for Incompressible Materials in the Shear Stress Space // Experimental and Numerical Investigation of Advanced Materials and Structures, Ed. by A. Öchsner, H. Altenbach. Springer International Publishing, 2013. Vol. 41 of Advanced Structured Materials. P. 107–119.
198. Kolupaev V. A., Yu M.-H., Altenbach H. Yield criteria of hexagonal symmetry in the  $\pi$ -plane // Acta Mechanica. 2013. Vol. 224. P. 1527–1540.
199. Lee E. H. Plastic flow in a V-notched bar pulled in tension // Journal of Applied Mechanics. 1952. Vol. 19, no. 3. P. 331—336.
200. Letcher T., Shen M.-H., Scott-Emuakpor O. et al. An energy-based critical fatigue life prediction method for AL6061-T6 // Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. 2012. Vol. 35, no. 9. P. 861–870.
201. Ma Z. Y., Liao H. J., Dang F. N. Unified elastoplastic finite difference and its application // Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol. 34, no. 4. P. 457–474.
202. Manson S. S. Behavior of materials under conditions of thermal stress // Heat Transfer Symposium, University of Michigan, Engineering Research Institute. 1953. P. 9–75.
203. Martin D. E. An energy criterion for low-cycle fatigue // Basic Engineering. Transaction of ASME. 1961. Vol. 83, no. 4. P. 565–571.
204. Oguni K., Wijerathne M., Okinaka T., Hori M. Crack propagation analysis using PDS-FEM and comparison with fracture experiment // Mechanics of Materials. 2009. Vol. 41, no. 11. P. 1242–1252.

205. Onat E., Prager W. The necking of a tension specimen in plane plastic flow // Journal of Applied Physics. 1954. Vol. 25, no. 4. P. 491–493.
206. Orowan E. Fundamentals of brittle behavior of metals // Fatigue and fracture of metals. N.Y.: Wiley, 1952. P. 139–167.
207. Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 53. P. 379–386.
208. Richmond O. Plane strain necking of V-notched and un-notched tensile bars // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1969. Vol. 17, no. 2. P. 83–90.
209. Xue L. Localization conditions and diffused necking for damage plastic solids // Engineering Fracture Mechanics. 2010. Vol. 77, no. 8. P. 1275–1297.
210. Yu M. H. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // Applied Mechanics Reviews. 2002. Vol. 55, no. 3. P. 169–218.

# Приложение А

## Сопоставление экспериментальных и теоретических данных

Определение основных механических характеристик материалов (в том числе, предел текучести, предел прочности, относительное удлинение образца) осуществляется, как правило, на основе экспериментов на одноосное растяжение цилиндрического образца. При этом опыты на сжатие аналогичных образцов достаточно редки. В данном приложении приводятся экспериментальные и теоретические данные для некоторых конструкционных материалов с целью показать качественную картину применимости предлагаемого в работе условия пластичности (3.13). Допустимая погрешность вычислений объясняется «снятием» экспериментальных данных с соответствующих графиков [1] и их пересчёте в современную систему измерений.

Используемые обозначения и вычисляемые величины:

$\sigma_{0,2}^+$ ,  $\sigma_{0,2}^-$  (МПа) — условные пределы текучести при растяжении и сжатии (остаточная деформация 0,2%), экспериментальные данные;

$\delta$  (%) — относительное удлинение образца при растяжении, соответствующее  $\sigma_{0,2}^+$ ;

– отношение пределов текучести на растяжение и сжатие(3.18)

$$K(\delta) = \frac{\sigma_{0,2}^+}{\sigma_{0,2}^-} = \frac{\delta [(3 + 2\delta)^2 + 3]}{2 [2(\delta + 1)^3 + 1] \left[ 2 \cos \left( \frac{\xi + 4\pi}{3} \right) - 1 \right]};$$

– предел текучести при сжатии (теоретическое значение), МПа

$$\sigma_{\text{теор}}^- = \frac{\sigma_{0,2}^+}{K(\delta)};$$

– относительные погрешности вычислений:

$$D_1 = \left| \frac{\sigma_{0,2}^- - \sigma_{\text{теор}}}{\sigma_{0,2}^-} \right| \cdot 100\%, \quad D_2 = \left| \frac{K_{0,2} - K(\delta)}{K_{0,2}} \right| \cdot 100\%.$$

На рисунках А.1, А.2 приведены диаграммы растяжения и сжатия для некоторых конструкционных сталей [1], пересчитанные в современную систему измерения.

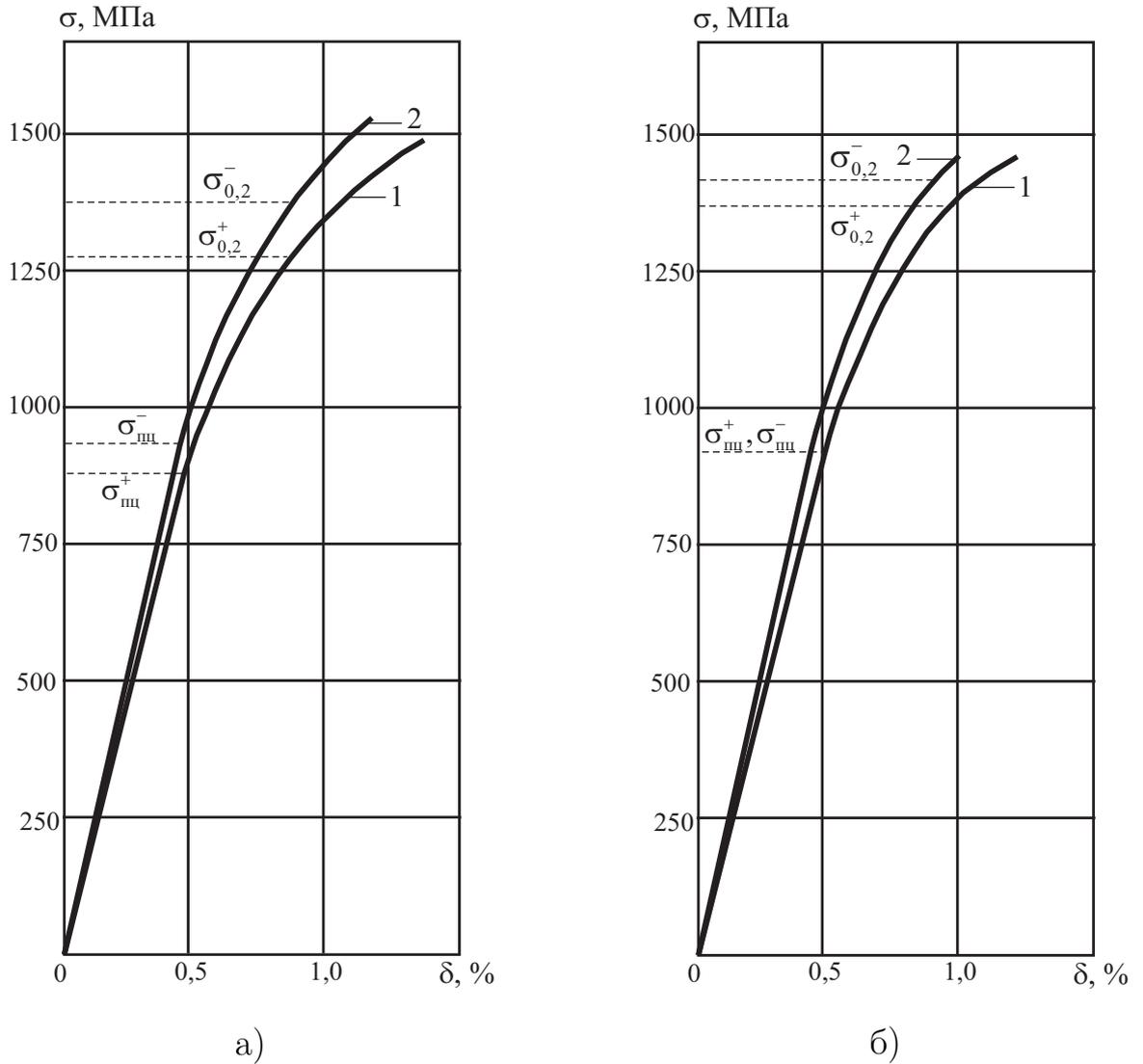
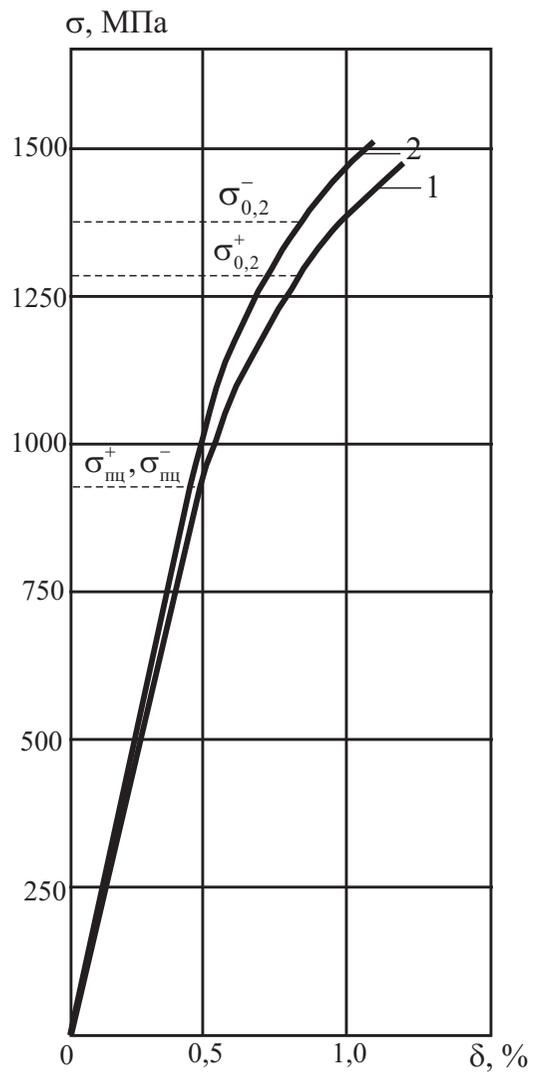
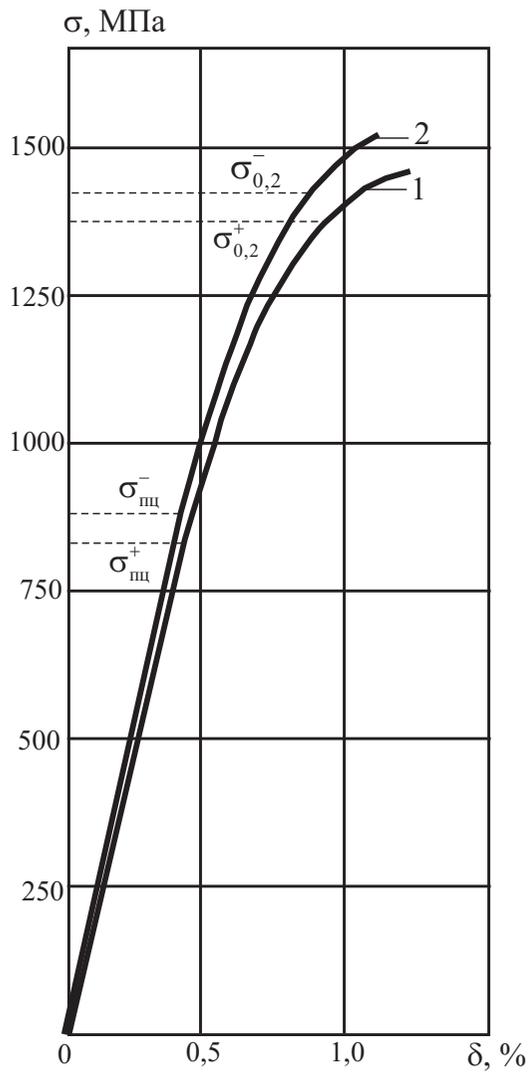


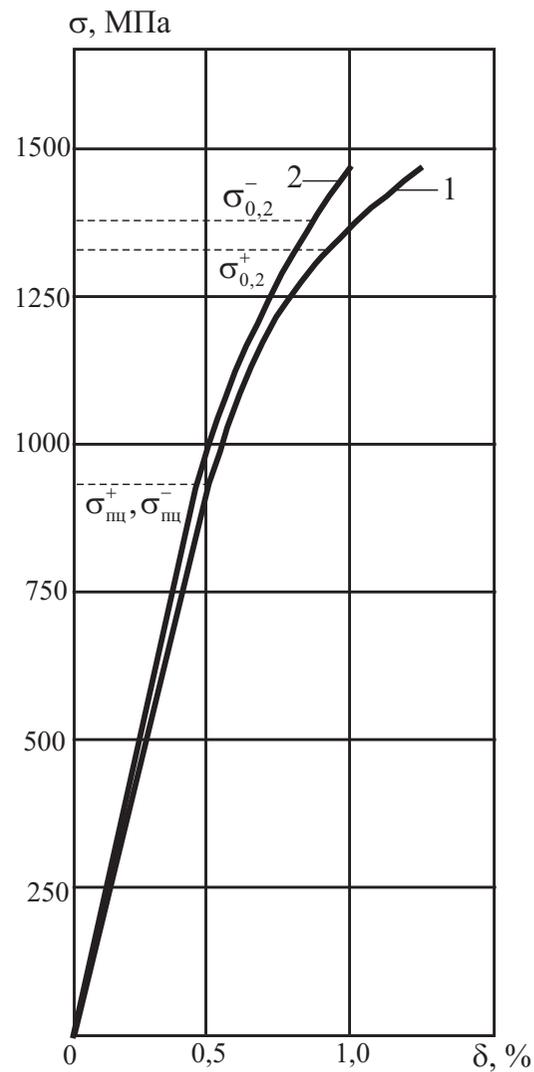
Рисунок А.1 — Диаграммы растяжения (1) и сжатия (2) сталей 30ХГСН2А (а) и 40ХН2СМА (б) при комнатной температуре, [1]



а)



б)



в)

Рисунок А.2 — Диаграммы растяжения (1) и сжатия (2) сталей 30X2ГСН2ВМ (а), 30X2Н2СВМФА (б) и 25X2ГНТА (в) при комнатной температуре, [1]

Таблица А.1 — Сопоставление экспериментальных и теоретических данных

Материал	Экспериментальные данные				Теоретические данные		Относительные погрешности	
	$\sigma_{0,2}^+$	$\delta$	$\sigma_{0,2}^-$	$K_{0,2}$	$K(\delta)$	$\sigma_{\text{теор}}^-$	$D_1, \%$	$D_2, \%$
Конструкционные деформируемые стали (высокопрочные стали), [1]								
30ХГСН2А	1275	0,88	1375	0,927	0,994	1282,5	6,73	7,22
40ХН2СМА	1373	1,00	1422	0,966	0,993	1382,1	2,80	2,89
30Х2ГСН2ВМ	1285	0,84	1376	0,934	0,994	1292,1	6,09	6,49
30Х2Н2СВМФА	1375	0,94	1424	0,966	0,994	1383,6	2,84	2,92
25Х2ГНТА	1329	0,92	1378	0,964	0,994	1337,1	2,97	3,06