

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЧУВАШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. Я. ЯКОВЛЕВА»

На правах рукописи

НИКИТИН АНДРЕЙ ВИТАЛЬЕВИЧ

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ
В КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф. – м. н., профессор

Миронов Борис Гурьевич

Чебоксары - 2015

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ	10
§1.1 Определение напряженного состояния неоднородной	10
трубы	10
§1.2 Определение деформированного состояния неоднородной трубы.....	33
Глава 2. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ТРУБ.....	54
§ 2.1 Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления.....	54
§ 2.2 Предельное состояние многослойной неоднородной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления.....	64
Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ И ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ЗАЩЕМЛЕННОГО ПО ДВУМ СТОРОНАМ.....	74
§ 3.1 Постановка задачи	74
§ 3.2 Разложения Лагранжа по функциям Фадля-Папковича	78
§ 3.3 Решение краевой задачи	86
§ 3.4 Решение для прямоугольника	94
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	97
ЛИТЕРАТУРА.....	99

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются упругопластические задачи для неоднородных труб и краевая задача теории упругости для полуполосы, длинные стороны которой зашпелены, а на торцах заданы напряжения.

В современном машиностроении, оборонной промышленности часто и активно используются анизотропные и неоднородные материалы, прочностным свойствам которых предъявляются повышенные требования. В качестве примера можно указать стволы артиллерийских орудий, цилиндры гидравлического прессы, и т.д.

Изучение совокупности свойств и качеств последних несомненно является важным и актуальным.

В теории пластичности неоднородность материала характеризуется зависимостью предела текучести от координат точек тела. На неоднородность материала могут влиять следующие факторы: температура, радиационное облучение, ударные воздействия и т.д.

Новые результаты, учитывающие влияние анизотропии и неоднородности на напряженно-деформированное состояние различных тел и конструкций, а также построение новых аналитических решений в канонических областях с угловыми точками границы являются востребованными в современном мире.

Степень разработанности. В середине XX века В. Олышак и его школа [118, 146, 147, 148, 149, 150, 151] дали толчок развитию теории пластичности неоднородных тел. В. Олышак, В. Урбановский, Я. Рыхлевский [112] сделали обзор «Теория пластичности неоднородных тел», в котором описаны работы, выполненные к середине 50-60 годам прошлого века.

В работе Хилла [145] была изучена неоднородность, вызванная упрочнением материала.

Задача о сдавливании неоднородного пластического слоя рассмотрена в работах А. А. Ильюшина [55], М. А. Задояна [37, 38].

Зависимость механических свойств твердых тел от радиоактивного облучения была изучена А. А. Ильюшиным [56], Ю. И. Ремневым [117], В. С. Ленским [79], П. М. Огибаловым [111], А. Г. Горшковым [25].

А. Н. Андреева и Ю. В. Немировский [90] в своей монографии решили различные задачи по анизотропным пластинам и оболочкам.

А. И. Кузнецов в [72, 73] рассматривал задачи кручения неоднородных пластических цилиндрических стержней. Он предположил, что предел текучести зависит от координат точки.

Метод малого параметра широко применялся в задачах определения напряженно - деформированного состояния различных тел. Так, например, в работах Л. В. Ершова и Д. Д. Ивлева [44] рассмотрен большой круг упругопластических задач с применением данного метода.

А. П. Соколов [120] первым решил упругопластическую задачу о двусосном растяжении тонкой пластины с круговым отверстием.

При решении задач пластической неоднородности Б. А. Друянов [33] также использовал выше указанный метод. В [34, 35] он рассмотрел задачи о вдавливании жестких штампов в идеально пластическое неоднородное полупространство и полосу.

Е. А. Целистова [141, 142, 143], И. П. Григорьев [52] исследовали влияние неоднородности на напряженное состояние слоя из идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами.

Упругопластические задачи для плоских неоднородных тел, ослабленных отверстием рассмотрел С. В. Тихонов [130, 131, 132].

Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленных различными видами отверстий при двусосном растяжении рассмотрены в работах П. Н. Кузнецова [76, 77, 78].

Составные и толстостенные трубы рассматривались в работах Н. М. Беляева [5], А. А. Ильюшина [56], А. П. Кержаева [63, 64], А. В. Ковалева [67], А. Н. Спорыхина [123, 124], Л. В. Ершова [36], П. М. Огибалова [111], В. В. Соколовского [122], Н. Д. Тарабасова [129], Д. А. Ивлева [40, 41], Фоминых С.О.

[137,138] и др.

Упругопластические задачи с учетом различных видов анизотропии рассматривались в работах: Б. Д. Анина [3,4], М. Т. Алимжанова [2], Г. И. Быковцева [7,9,10], А. М. Васильевой [11], С. А. Вульман [15], А. Г. Гениева [19, 20, 21, 22], Л. В. Ершова[44], В. Г. Зубчанинова[39], Д. Д. Ивлева[43, 46, 47], Д. А. Ивлева [42], А. А. Ильюшина [53, 54, 55], А. Ю. Ишлинского [59, 61], Л. М. Качанова [62], А. В. Ковалева[64, 68], Н. М. Матченко [74], И. Н. Матченко[75], Б. Г. Миронova [87], А. Надаи[88, 89], В. Прагера [114, 115], Б. Е. Победри [116], В. В. Соколовского [122], Т. Д. Семькиной [119], А. Н. Спорыхина [123, 126], Л. А. Толоконникова [133, 134], Р. Хилла [140, 145], А. И. Шашкина [127], Г. П. Черепанова [144], В. О. Геогджаева [23] и др.

Известно, что при построении уточненных теорий оболочек и пластинок [14, 24] требуется знать напряженно-деформированное состояние упругой полуполосы. Поэтому эта задача теории упругости на протяжении многих лет привлекала внимание многочисленных исследователей. При решении ее использовались различные подходы. Отметим некоторые из них. Задача о симметрично нагруженной полуполосе, заделанной по торцу, рассматривалась И.И. Воровичем и В. В. Копасенко [13]. Они свели эту задачу к интегральному уравнению Фредгольма первого порядка с неподвижной особенностью относительно нормального напряжения в заделке. В некоторой степени, как отмечается авторами, эта особенность усложняет исследование уравнения, а также численное решение. Л.А.Агаловян и Р.С.Геворкян [1] решают задачу для полуполосы со свободными от напряжения продольными сторонами, когда на торце заданы перемещения. Решение сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что полученная система вполне регулярна. При решении конкретной задачи учитывался лишь первый член асимптотики, что не дает возможность судить о скорости сходимости процесса, так как В. Т. Гринченко [28] показал, что из регулярности бесконечной системы не следует равномерная сходимость последовательности решений краевых задач, полученных на основе метода редукции. В. В. Копасенко [71] при решении системы уравнений бесконечного порядка предлагает использо-

вать свой метод. Л.П. Трапезников [135] применил вариационный метод. Теокарис [152] при решении задачи о полуполосе со свободными продольными сторонами, на торце которой действует сосредоточенная сила, использовал энергетический метод. М.И. Гуссейн-Заде [30, 31] исследовала условия, которым должны удовлетворять задаваемые на конце напряжения или перемещения, чтобы решения затухали при удалении от этого конца. Большое значение имеют полученные точные решения этой задачи и в связи с широкими возможностями практического использования полученных результатов. Класс точных решений фактически ограничивается функциями Фадля-Папковича [113], описывающими полуполосу со свободными продольными кромками и торцом, нагруженным самоуравновешенной системой нормальных и касательных сил. В работе [58] В. Л. Инденбом и В.И. Даниловская показали, что продолжение решения через продольные кромки полуполосы открывают новые пути решения задачи и позволяет, в частности, строить новые полные системы точных решений. В. И. Даниловская [32] задачу об определении температурных напряжений в прямоугольной пластинке с помощью метода М.М.Филоненко-Бородича [136] свела к одной бесконечной системе. Исследовала структуру этой системы и построила её решение. Этот подход был реализован в [128] при определении температурных напряжений в упругом параллелепипеде. Задача о полуполосе с заделанными краями рассматривалась также в работе [80].

Целью работы является изучение упругопластического состояния толстых неоднородных круговых труб, которые находятся под внутренним давлением, изучение влияния неоднородности на изменение упругопластической границы, а также аналитическое решение краевой задачи для полуполосы, защемлённой по продольным сторонам.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) исследовать упругопластическое напряженное состояние толстостенной неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности

- 2) исследовать упругопластическое деформированное состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности;
- 3) определить предельное состояния многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае, когда каждый слой обладает своими параметрами анизотропии;
- 4) определить предельное состояние многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае, когда каждый слой обладает своими параметрами неоднородности;
- 5) построить точное аналитическое решение краевой задачи теории упругости для полуполосы (прямоугольника), защемленной по продольным сторонам;

Научная новизна состоит в определении упругопластического состояния неоднородных труб и построении точного аналитического решения задачи для полуполосы, защемленной по продольным сторонам.

Методология и методы исследования. В части диссертации, посвященной теории пластичности, напряженно-деформированное состояние определяется с помощью метода разложения по малому параметру, который берет свое начало от работ Пуанкаре. Д.Д. Ивлев и Л.Л. Ершов развили данный метод применительно к упругопластическим задачам [44]. В части диссертации, посвященной теории упругости, решения ищутся в виде разложений по функциям Фадля-Папковича. Эти функции не образуют базис на отрезке, но образуют его на римановой поверхности логарифма. Теория базиса функций Фадля-Папковича разработана около 10 лет назад.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации позволяют оценить влияние неоднородности материала на упругопластическое состояние труб. Аналитические решения можно использовать в прочностных расчетах, для тестирования численных методов. На основе

полученных решений могут быть найдены решения более сложных задач, в том числе и смешанных.

Степень достоверности работы. Достоверность обусловлена непротиворечивостью с результатами исследований других авторов, строгостью постановки краевых задач, основана на использовании строгих математических методов исследования, апробированных моделей механического поведения тел.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации и работа в целом докладывались: на семинарах по механике деформируемого твердого тела под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора, Ивлева Д. Д. (г. Чебоксары, ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2011-2012 гг.); на семинарах по механике деформируемого твердого тела под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора, Миронова Б. Г. (г. Чебоксары, ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2011-2015 гг.); на семинарах по математике под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора, Орлова В. Н. (г. Чебоксары, ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2014-2015 гг.); на научно-практических конференциях докторантов, аспирантов и соискателей по итогам научно-исследовательской работы 2011-2015гг. (г. Чебоксары, ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2011-2015 гг.); на XIV международной заочной научно-практической конференции «Научная Дискуссия: Вопросы математики, физики, химии, биологии» (г. Москва, 2014 г.); на международной научно-практической конференции «Современные проблемы, материалы, механики, информатики» (г. Тула 2013 г.); на XVII международной научно-практической конференции «Естественные и Математические науки в современном мире» (г. Новосибирск, 2014 г.); на международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий» (г. Чебоксары 2013 г.); на VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тел (г. Чебоксары 2014 г.); на XIII международной научно-практической конференции "Естественные и Математические науки в современном мире" (г. Новосибирск, 2013 г.); на VIII региональной научно – практической конференции студентов, аспирантов, ученых и специалистов «Наука, Экономика, Общество» (г. Воскресенск, 2014 г.); на III

международной научно-практической конференции «Приоритетные направления развития науки и образования» (г. Чебоксары, 2014 г.); на X международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (г. Алушта, 2014 г.);

На защиту выносятся следующие положения:

- 1) исследование упругопластического напряженного состояния толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности;
- 2) исследование упругопластического деформированного состояния толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности;
- 3) определение предельного состояния многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае когда каждый слой обладает своими параметрами анизотропии;
- 4) определение предельного состояния многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае когда каждый слой обладает своими параметрами неоднородности;
- 5) построение точного аналитического решения краевой задачи теории упругости для полуполосы (прямоугольника), защемленной по продольным сторонам;

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 20 научных работах, из них 10 работ опубликованы в рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 8 параграфов, заключения и списка используемой литературы.

Глава 1. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Данная глава посвящена исследованию упругопластического состояния неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности.

§1.1 Определение напряженного состояния неоднородной трубы

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a , b ; $a < b$ (рисунок 1.1), которая находится под действием внутреннего давления p .

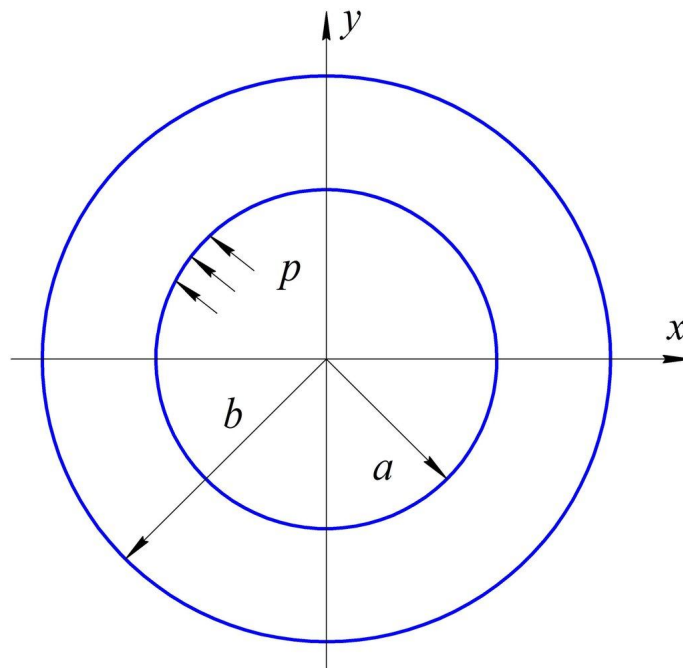


Рисунок 1.1

Предполагается, что часть трубы находится в пластической области, другая часть – в упругой. В пластической области напряженное состояние определено из условия пластичности [46]:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_{xy}^2, \quad k_1, k_2, k_3 = const, \quad (1.1.1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат, $k_{xy} = k_{xy}(x, y)$, а также из уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

1. Положим

$$\begin{aligned} k_1 &= k^0 + \delta k'_1, \quad k_2 = k^0 + \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3, \\ k_{xy} &= k_0 + \delta(cx + dy), \quad k_0, c, d = const, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

где δ – малый безразмерный параметр.

Согласно (1.1.3) величина k_{xy} сохраняет постоянное значение вдоль прямых

$$cx + dy = f, \quad f = const \quad (1.1.4)$$

и изменяется в зависимости от изменения величины f .

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k_0 . Компонентам напряжений в пластической зоне приписан индекс $\ll p \gg$ наверху, компонентам в упругой зоне – индекс $\ll e \gg$ наверху.

Положим, что $\alpha = \frac{a}{\rho_s^{(0)}}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_s^{(0)}}$, где $\rho_s^{(0)}$ – радиус пластической зоны в

нулевом приближении.

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta), \\ y = \rho \sin(\theta). \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) + \tau_{\rho\theta} \sin(2\theta), \\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) - \tau_{\rho\theta} \sin(2\theta), \\ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin(2\theta) + \tau_{\rho\theta} \cos(2\theta). \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Уравнения равновесия (1.1.2) согласно (1.1.6) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Из (1.1.1), (1.1.5), (1.1.6) получим условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta}^p \right)^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \cos(2\theta + \zeta) - \\ & - 2\tau_{\rho\theta}^p \sin(2\theta + \zeta) R + R^2 - 1 - 2\rho\delta R_0 \sin(\theta + \eta) = 0, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

где

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos(\zeta), \quad \frac{k_3}{R} = \sin(\zeta),$$

$$R_0 = \sqrt{c^2 + d^2}, \quad \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \cos(\eta), \quad \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \sin(\eta).$$

Обозначим: $R' = \sqrt{\left(\frac{k'_1 - k'_2}{2}\right)^2} + k'_3$. Тогда $R = \delta R'$.

Решение системы (1.1.7), (1.1.8) определено в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)}\delta + \sigma_{ij}^{(II)}\delta^2 + \dots \quad (1.1.9)$$

Положим

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho_s^{(I)}\delta + \rho_s^{(II)}\delta^2 + \dots,$$

где ρ_s – радиус пластической зоны.

Предположим, что в исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (1.1.10)$$

Согласно[44] получаем:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = 2 \ln \rho + C, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \rho + C, \quad (1.1.11)$$

где $C = const$.

Предположим также, что внешняя граница трубы свободна от усилий. Тогда на внешней и внутренней границе трубы выполняется условие:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -p, \quad \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=\beta} = 0. \quad (1.1.12)$$

Из (1.1.11), (1.1.12) имеют место

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = -p + 2 \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right), \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = -p + 2 + 2 \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right). \quad (1.1.13)$$

Согласно[44] напряженное состояние трубы в упругой области в нулевом приближении определяется из соотношений:

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = A - \frac{B\beta^2}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = A + \frac{B\beta^2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (1.1.14)$$

Условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе имеют следующий вид:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (1.1.15)$$

Согласно (1.1.13) из (1.1.15) имеем:

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln \alpha}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right). \quad (1.1.16)$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношением:

$$\left(\frac{b}{\rho_s^{(0)}} \right)^2 = \frac{1}{1 - 2 \ln \left(\frac{a}{\rho_s^{(0)}} \right) - p}. \quad (1.1.17)$$

Согласно (1.1.9), (1.1.10) из (1.1.8) в первом приближении получим:

$$\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\rho}^{(I)p} = -2(\cos(2\theta + \zeta)) + 2\rho(c \cos \theta + d \sin \theta). \quad (1.1.18)$$

Уравнения равновесия в первом приближении не меняются и принимают вид (1.1.7). Удовлетворим уравнениям равновесия (1.1.7), положив:

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)p} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (1.1.19)$$

Из (1.1.18) согласно (1.1.19) получим:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -2R' \rho^2 \cos(2\theta + \zeta) + 2\rho^3 (c \cos \theta + d \sin \theta). \quad (1.1.20)$$

В первом приближении граничные условия на внутреннем имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha} &= 0, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Компоненты напряжения в пластической зоне будут определяться из (1.1.20), согласно (1.1.19), (1.1.21). Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} = & -R' \left(\frac{\alpha}{\rho} \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] - 1 \right) \cos(2\theta + \zeta) + \\ & + (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right), \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(I)p} = & -R' \left(\frac{\alpha}{\rho} \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] + 1 \right) \cos(2\theta + \zeta) + \\ & + (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + 3\rho \right), \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & R' \left(\frac{\alpha}{\rho} \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] - 1 \right) \sin(2\theta + \zeta) + \\ & + (c \sin(\theta) - d \cos(\theta)) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right). \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Из (1.1.22), (1.1.24) следует:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= a_1'' \cos(\theta) + b_1'' \sin(\theta) + a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= a_1''' \cos(\theta) + b_1''' \sin(\theta) + a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

где

$$\begin{aligned} a_2'' &= -R' \alpha \cos(\zeta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] + R' \cos(\zeta), \\ b_2'' &= R' \alpha \sin(\zeta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] - R' \sin(\zeta), \\ a_2''' &= R' \alpha \sin(\zeta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] - R' \sin(\zeta), \\ b_2''' &= R' \alpha \cos(\zeta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right] - R' \cos(\zeta), \\ a_1'' &= (-\alpha^2 c + c), \quad b_1'' = (-\alpha^2 d + d), \quad a_1''' = (\alpha^2 d - d), \quad b_1''' = (-\alpha^2 c + c). \end{aligned}$$

С учетом [44] из (1.1.25), компоненты напряжения трубы в упругой области в первом приближении определяются в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)e} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (c \cos \theta + d \sin \theta) + \\
&+ R' \frac{2\beta^6 \rho^2 - 2\beta^4 \rho^4 - \beta^6 + 2\beta^4 \rho^2 - \beta^2 \rho^4 - 3\beta^4 + 4\beta^2 \rho^2 - \rho^4}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cdot \\
&\cdot \cos(2\theta + \zeta) \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + 1 \right) - \\
&- 2\beta^4 R' \frac{(\beta^6 \rho^2 - \rho^4 - \beta^2 + \rho^2)}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cos(2\theta + \zeta) \cdot \\
&\cdot \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 1 \right), \tag{1.1.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^{(I)e} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(3\rho + \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (c \cos \theta + d \sin \theta) + \\
&+ R' \frac{2\beta^6 \rho^4 - 6\beta^2 \rho^6 + \beta^6 + \beta^2 \rho^4 - 2\rho^6 + 3\beta^4 + \rho^4}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cdot \\
&\cdot \cos(2\theta + \zeta) \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + 1 \right) + \\
&+ 2R' \frac{(-\beta^4 \rho^4 + 3\beta^2 \rho^6 + \beta^6 - \rho^6)}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cos(2\theta + \zeta) \cdot \\
&\cdot \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 1 \right), \tag{1.1.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (c \sin \theta - d \cos \theta) + \\
&+ R' \frac{\beta^6 \rho^2 + 2\beta^4 \rho^4 - 3\beta^2 \rho^6 - \beta^6 + \beta^4 \rho^2 + \beta^2 \rho^4 - \rho^6 - 3\beta^4 + 2\beta^2 \rho^2 + \rho^4}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cdot \\
&\cdot \sin(2\theta + \zeta) \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + 1 \right) + \\
&+ R' \frac{(\beta^6 \rho^2 + 2\beta^4 \rho^4 - 3\beta^2 \rho^6 + 2\beta^6 + \beta^4 \rho^2 + \rho^6)}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \sin(2\theta + \zeta) \cdot \tag{1.1.28} \\
&\cdot \left(-\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 1 \right).
\end{aligned}$$

Согласно[44] граница упругопластической области определяется из соотношения:

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{4} \left(\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p} \right). \quad (1.1.29)$$

Из(1.1.23), (1.1.27) и (1.1.29) найдем границу упругопластической области в первом приближении:

$$\begin{aligned} \rho_s^{(I)} = & \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} (3 + \beta^4) + (\alpha^2 - 3) \right) (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) + \right. \\ & \left. + R' \frac{3\beta^6 - 5\beta^2 - 1 + 3\beta^4}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1)} \cos(2\theta + \zeta) \right. \\ & \cdot \left(\sqrt{3}\alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + 1 \right) + \\ & \left. + 2R' \frac{(-\beta^4 + 3\beta^2 + \beta^6 - 1)}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1)} \cos(2\theta + \zeta) \right. \\ & \cdot \left(\sqrt{3}\alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 1 \right) + \\ & \left. + R' \left(\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) + 1 \right) \cos(2\theta + \zeta) \right]. \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

При $k_1, k_2, k_3 = 0$ имеем результаты, полученные в работе [130], при $c = d = 0$ - результаты, полученные в [138].

Рассмотрим случай, когда что малый параметр δ есть модуль вектора смещения поверхности текучести (рисунок 1.2).

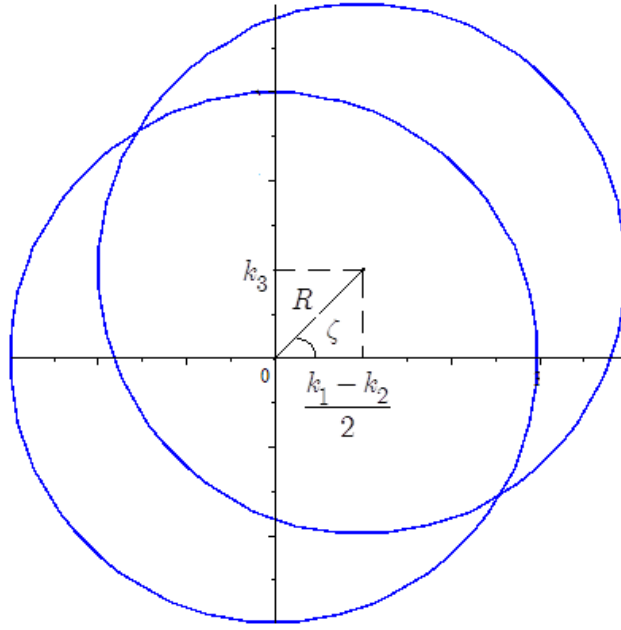


Рисунок 1.2

Тогда

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2} = R, \quad k^0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad (1.1.31)$$

$$k'_1 = \cos(\zeta), \quad k'_2 = -\cos(\zeta), \quad k'_3 = \sin(\zeta), \quad R' = 1.$$

Рассмотрим динамику изменения расположения упругопластической границы трубы с учетом первого приближения в зависимости от параметров неоднородности c и d .

На рисунке 1.3 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$c = 0, \quad d = 1, \quad \zeta = 0, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.05.$$

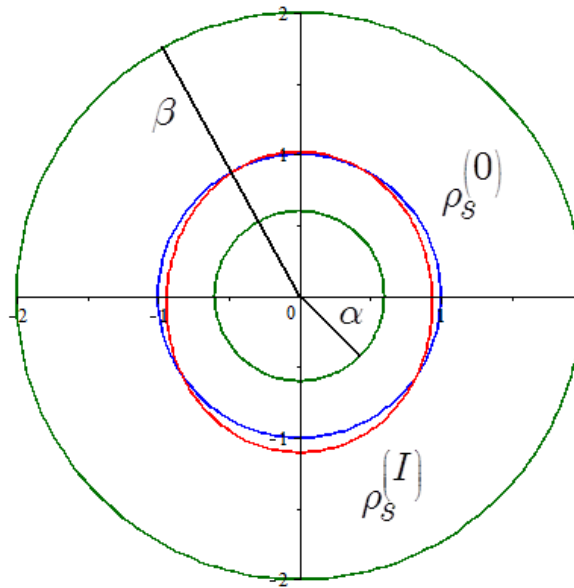


Рисунок 1.3

На рисунке 1.4 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$c = 1, \quad d = 0, \quad \zeta = 0, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.05.$$

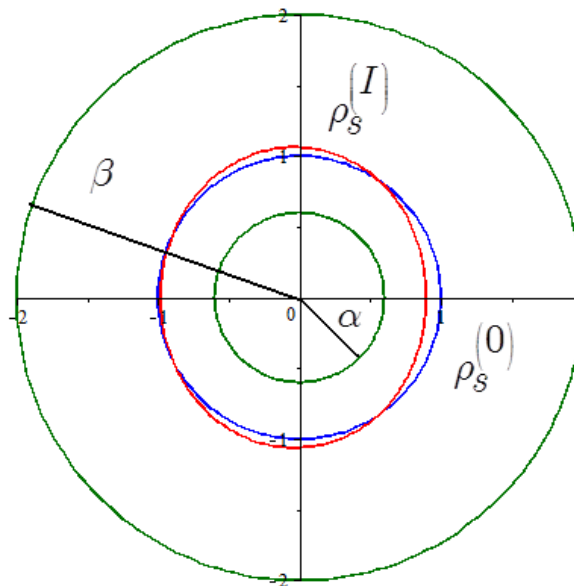


Рисунок 1.4

На рисунке 1.5 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$c = 1, \quad d = 1, \quad \zeta = 0, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.05.$$

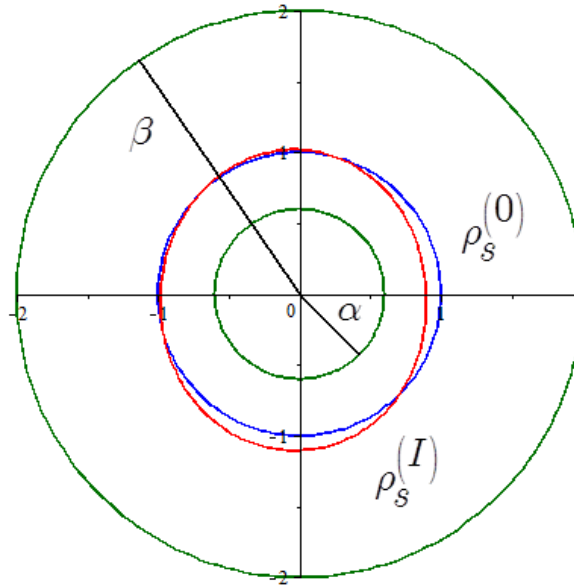


Рисунок 1.5

На рисунке 1.6 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$c = 1, \quad d = -1, \quad \zeta = 0, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.05.$$

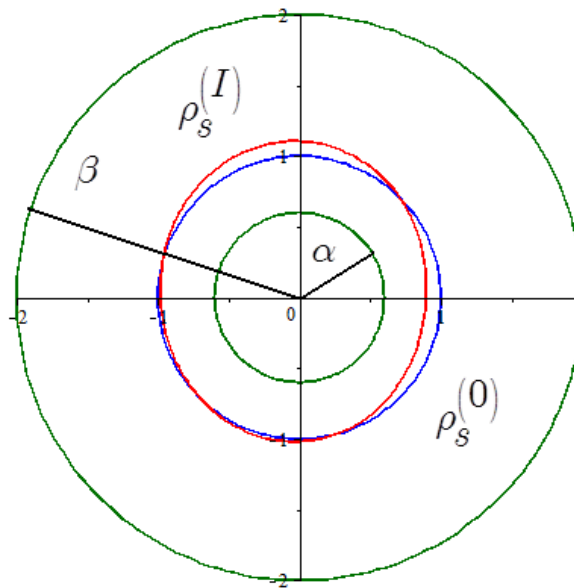


Рисунок 1.6

На рисунке 1.7 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$c = 1, \quad d = 1, \quad \zeta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.05.$$

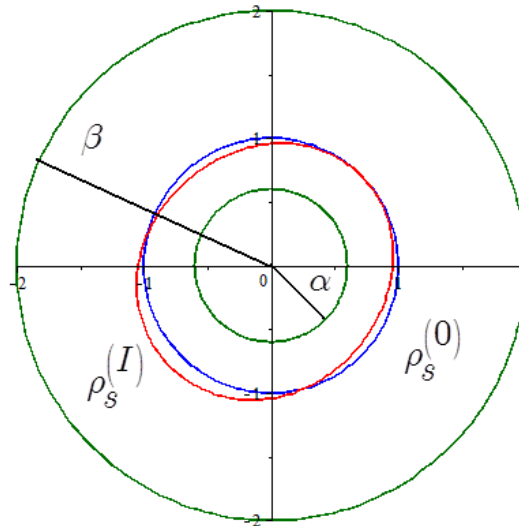


Рисунок 1.7

Ниже рассмотрим динамику изменения расположения упругопластической границы трубы в первом приближении в зависимости от угла ζ .

На рисунке 1.8 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$c = 1, \quad d = 1, \quad \zeta = \pi, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.05.$$

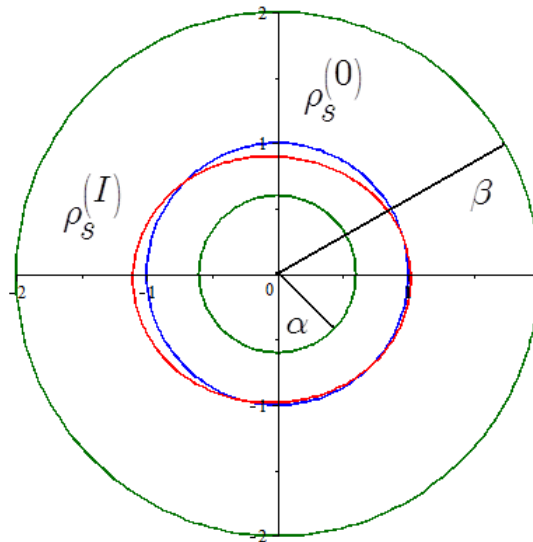


Рисунок 1.8

На рисунке 1.9 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$c = 1, \quad d = 1, \quad \zeta = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.05.$$

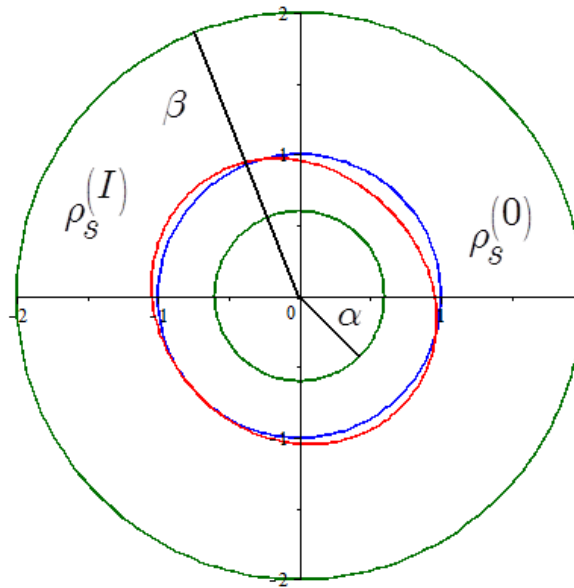


Рисунок 1.9

На рисунке 1.10 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$c = 1, \quad d = 1, \quad \zeta = 0, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad \delta = 0.05.$$

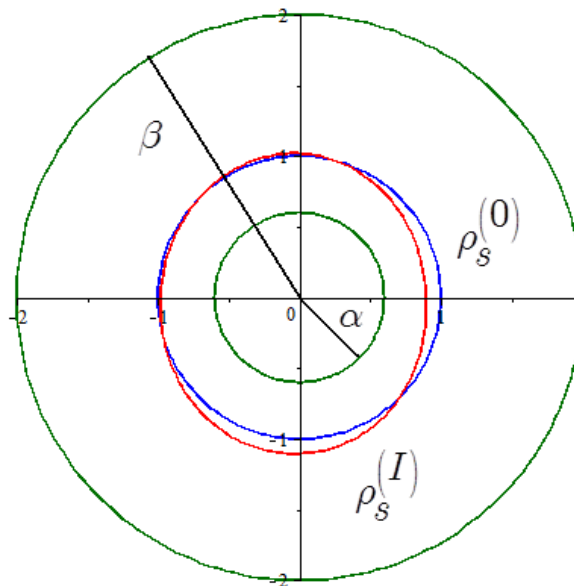


Рисунок 1.10

Таким образом, в пластической области напряженное состояние определяется по формулам (1.1.22) – (1.1.24), в упругой по формулам (1.1.26) – (1.1.28). Изменение упругопластической границы определяется по формуле (1.1.30).

2. Положим:

$$k_{xy} = k_0 + \delta \left(\frac{(x+A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y+B)^2}{\bar{b}^2} \right), \quad k_0, \bar{a}, \bar{b}, A, B - const, \quad (1.1.32)$$

где δ - малый безразмерный параметр.

Согласно (1.1.32) величина k_{xy} сохраняет постоянное значение вдоль эллипсов:

$$\frac{(x+A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y+B)^2}{\bar{b}^2} = c, \quad c - const \quad (1.1.33)$$

и изменяется в зависимости от изменения величины c .

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k_0 . Компонентам напряжений в пластической зоне приписан индекс $\ll p \gg$ наверху, компонентам в упругой зоне – индекс $\ll e \gg$ наверху.

Положим, что $\alpha = \frac{a}{\rho_s^{(0)}}$, $\beta = \frac{b}{\rho_s^{(0)}}$, где $\rho_s^{(0)}$ – радиус пластической зоны в

нулевом приближении. Черту сверху у величин $\bar{a}$, $\bar{b}$ опустим.

Из (1.1.1), (1.1.32), (1.1.5), (1.1.6) получим условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta}^p \right)^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \cos(2\theta + \zeta) - \\ & - 2\tau_{\rho\theta}^p \sin(2\theta + \eta) R + R^2 - 1 - 2\delta \left(\frac{(\rho \cos \theta + A)^2}{a^2} + \frac{(\rho \sin \theta + B)^2}{b^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

В нулевом приближении имеет место (1.1.10). Компоненты напряжения в нулевом приближении в пластической области имеют вид (1.1.13), в упругой области – (1.1.16).

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношением (1.1.17).

Согласно (1.1.34) из (1.1.9), (1.1.10) в первом приближении имеем:

$$\sigma_{\theta}^{(I)p} - \sigma_{\rho}^{(I)p} = -2R' \cos(2\theta + \zeta) + 2 \left[\frac{(A + \rho \cos(\theta))^2}{a^2} + \frac{(B + \rho \sin(\theta))^2}{b^2} \right]. \quad (1.1.35)$$

Удовлетворим (1.1.7) предполагая (1.1.19).

Из (1.1.35) согласно (1.1.19) получим:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -2R' \rho^2 \cos(2\theta + \zeta) + 2\rho^2 \left[\frac{(A + \rho \cos(\theta))^2}{a^2} + \frac{(B + \rho \sin(\theta))^2}{b^2} \right]. \quad (1.1.36)$$

Компоненты напряжения в пластической области будет определяться из (1.1.36) согласно (1.1.19), (1.1.21):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} = & \frac{2(Ab^2 \cos(\theta) + Ba^2 \sin(\theta))(\rho^2 - \alpha^2)}{a^2 b^2 \rho} + \cos(2\theta + \zeta) R' \left[\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\alpha}{\rho} \cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{2}{a^2 b^2} (b^2 A^2 + a^2 B^2) \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) + \frac{\sqrt{3} \alpha R'}{\rho} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \cos(2\theta - \zeta) + \\ & + \frac{1}{3 \rho a^2 b^2} \left[\cos(2\theta) \alpha^3 (b^2 - a^2) \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^{(I)p} = & -\frac{2\alpha^2}{a^2b^2\rho} \left(Ab^2 \cos(\theta) + Ba^2 \sin(\theta) \right) - R' \cos(2\theta + \zeta) \left(\frac{\alpha}{\rho} \cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + 1 \right) + \\
& + \frac{\alpha^2 \sqrt{3} \cos(2\theta) (b^2 - a^2) \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right)}{3a^2b^2\rho} + \frac{\alpha R' \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \cos(2\theta - \zeta)}{\rho} + \\
& + \left(\frac{a^2 + b^2}{6a^2b^2\rho} \right) (9\rho^3 - 3\alpha^2\rho) + \left(\frac{b^2A^2 + a^2B^2}{6a^2b^2\rho} \right) \left(12\rho \left(\ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) + 1 \right) \right) + \frac{6\rho}{a^2b^2} (Ba^2 \cos(\theta) + Ab^2 \sin(\theta)) + \\
& + \rho^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \right) \cos(2\theta),
\end{aligned} \tag{1.1.38}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & \frac{2(Ba^2 \cos(\theta) - Ab^2 \sin(\theta))(\alpha^2 - \rho^2)}{a^2b^2\rho} + \\
& + \sin(2\theta + \zeta) \frac{R'\alpha}{\rho} \left(-\sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + \cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \right) + \\
& + \frac{\sin(2\theta) \alpha^3 (a^2 - b^2) \left[3 \cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \right]}{6a^2b^2\rho} + \frac{\rho^2}{2a^2b^2} (b^2 - a^2) \sin(2\theta).
\end{aligned} \tag{1.1.39}$$

Из (1.1.37), (1.1.39) следует:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)\rho} &= a_0'' + a_1'' \cos(\theta) + b_1'' \sin(\theta) + a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta), \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)\rho} &= a_0''' + a_1''' \cos(\theta) + b_1''' \sin(\theta) + a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta),
\end{aligned} \tag{1.1.40}$$

где

$$\begin{aligned}
a_2'' &= \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) \cos(\zeta) - \sqrt{3}\alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \cos(\zeta) - \\
&\quad - \frac{1}{3a^2b^2} \alpha^3 (b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)), \\
b_2'' &= - \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) \sin(\zeta) - \sqrt{3}\alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \sin(\zeta), \\
a_2''' &= R'\alpha \left(\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) \sin(\zeta), \\
b_2''' &= R'\alpha \left(\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) \cos(\zeta) + \\
&\quad + \frac{\alpha^3 (a^2 - b^2) \left[3 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right]}{6a^2b^2} + \frac{(b^2 - a^2)}{2a^2b^2}, \\
a_1'' &= \frac{2A}{a^2} (1 - \alpha^2), b_1'' = \frac{2B}{b^2} (1 - \alpha^2), a_1''' = \frac{2B}{b^2} (\alpha^2 - 1), b_1''' = -\frac{2A}{a^2} (\alpha^2 - 1), \\
a_0 &= \frac{-2}{a^2b^2} (b^2A^2 + a^2B^2) \ln(\alpha).
\end{aligned}$$

С учетом [44], согласно (1.1.40) компоненты напряжения трубы в упругой области в первом приближении определяются в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)e} &= -2 \frac{(A^2b^2 + B^2a^2) \ln(\alpha) (\beta^2 - \rho^2)}{a^2b^2\rho^2 (\beta^2 - 1)} - \\
&\quad - \frac{2(\alpha^2 - 1)(\beta^4 - \rho^4)}{\rho^3 (\beta^4 - 1)} \left(\frac{A \cos(\theta)}{a^2} + \frac{B \sin(\theta)}{b^2} \right) - \\
&\quad - \frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{(\beta^4 \rho^4 - 2\beta^6 \rho^4 + \rho^4 + 3\beta^4 - 2\beta^6 - \beta^8 + 2\beta^4 \rho^2 - 4\beta^2 \rho^2 + 2\beta^8 \rho^2)}{a^2b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \beta^4 \rho^4} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \left[3\sqrt{3}a^2b^2 \cos(2\theta - \zeta) - \alpha^2 (a^2 - b^2) \cos(2\theta) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3b^2 \cos(2\theta + \zeta) \left[a^2 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \right] - \\
& - \frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{\left(\rho^4 - \beta^2 \rho^4 - \beta^4 + \beta^2 + \beta^4 \rho^2 - \rho^2 \right)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \rho^4}. \quad (1.1.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\cos(2\theta) (a^2 - b^2) \left[3\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3}\alpha^3 \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 3 \right] + \right. \\
& \left. 6a^2 b^2 \cos(2\theta + \zeta) \left[\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] \right), \\
& \sigma_{\theta}^{(I)e} = 2 \frac{\left(A^2 b^2 + B^2 a^2 \right) \ln(\alpha) (\beta^2 + \rho^2)}{a^2 b^2 \rho^2 (\beta^2 - 1)} - \\
& + \frac{2(\alpha^2 - 1)(\beta^4 + 3\rho^4)}{\rho^3 (\beta^4 - 1)} \left(\frac{A \cos(\theta)}{a^2} + \frac{B \sin(\theta)}{b^2} \right) - \\
& - \frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{\left(2\beta^6 \rho^4 - 6\beta^4 \rho^6 + \beta^8 - \beta^4 \rho^4 + 4\beta^2 \rho^6 + 2\beta^6 + 2\rho^6 - 3\beta^4 - \rho^4 \right)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \beta^4 \rho^4} \\
& \cdot \left(\sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \left[3\sqrt{3} a^2 b^2 \cos(2\theta - \zeta) - \alpha^2 (a^2 - b^2) \cos(2\theta) \right] + \right. \\
& \left. + 3b^2 \cos(2\theta + \zeta) \left[a^2 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{\left(\beta^4 \rho^4 - \beta^6 \rho^4 + \beta^8 - \beta^6 + 3\beta^4 \rho^6 - 4\rho^6 \beta^2 + \rho^6 \right)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \beta^4 \rho^4} \right). \quad (1.1.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\cos(2\theta) (a^2 - b^2) \left[3\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3}\alpha^3 \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 3 \right] + \right. \\
& \left. 6a^2 b^2 \cos(2\theta + \zeta) \left[\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tau_{\rho\theta}^{(I)e} = \frac{2(\alpha^2 - 1)(\beta^4 - \rho^4)}{\rho^3(\beta^4 - 1)} \left(\frac{B \cos(\theta)}{b^2} - \frac{A \sin(\theta)}{a^2} \right) - \\
& - \frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{(\beta^8 \rho^2 + 2\beta^6 \rho^4 - 3\beta^4 \rho^6 - \beta^8 - \beta^4 \rho^4 + 2\rho^6 \beta^2 - 2\beta^6 + \beta^4 \rho^2 + \rho^6 + 3\beta^4 - 2\beta^2 \rho^2 - \rho^4)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \beta^4 \rho^4} \\
& \cdot \left[\sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \left[3\sqrt{3} a^2 b^2 \sin(2\theta - \zeta) - \alpha^2 (a^2 - b^2) \sin(2\theta) \right] + \right. \\
& \quad \left. + 3b^2 \sin(2\theta + \zeta) \left[a^2 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \right] \right] + \\
& - \frac{\alpha R'}{6} \cdot \frac{(\beta^8 \rho^2 + 2\beta^6 \rho^4 - 3\rho^6 \beta^4 - 2\beta^8 - 2\beta^4 \rho^4 + 4\beta^2 \rho^6 + 2\beta^6 - \beta^4 \rho^2 - \rho^6)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \beta^4 \rho^4} \\
& \left[\sin(2\theta) (a^2 - b^2) \left[3\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \alpha^3 \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 3 \right] + \right. \\
& \quad \left. 6a^2 b^2 \sin(2\theta + \zeta) \left[\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] \right],
\end{aligned} \tag{1.1.43}$$

Из (1.1.38), (1.1.42) и (1.1.29) найдем границу упругопластической области в первом приближении:

$$\begin{aligned}
\rho'_s = \frac{1}{4} (\sigma_{\theta}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)p}) = \frac{1}{4} & \left[2 \frac{(A^2 b^2 + B^2 a^2) \ln(\alpha) (\beta^2 + 1)}{a^2 b^2 (\beta^2 - 1)} - \right. \\
& \left. + \frac{2(\alpha^2 - 1)(\beta^4 + 3)}{(\beta^4 - 1)} \left(\frac{A \cos(\theta)}{a^2} + \frac{B \sin(\theta)}{b^2} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{(\beta^8 - 10\beta^4 + 4\beta^6 + 4\beta^2 + 1)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4}\right)} \beta^4 \cdot \\
& \cdot \left(\sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \left[3\sqrt{3} a^2 b^2 \cos(2\theta - \zeta) - \alpha^2 (a^2 - b^2) \cos(2\theta) \right] + \right. \\
& \quad \left. + 3b^2 \cos(2\theta + \zeta) \left[a^2 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \right] \right) + \\
& + \frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{(\beta^8 - 2\beta^6 + 4\beta^4 - 4\beta^2 + 1)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4}\right)} \beta^4 \cdot \\
& \cdot \left(\cos(2\theta) (a^2 - b^2) \left[3\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \alpha^3 \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 3 \right] + \right. \\
& \quad \left. + 6a^2 b^2 \cos(2\theta + \zeta) \left[\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] \right) + \\
& + \frac{\alpha^2 \sqrt{3} \cos(2\theta) (a^2 - b^2) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha))}{3a^2 b^2} - \alpha R' \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \cos(2\theta - \eta) + \\
& + \left(\frac{a^2 + b^2}{6a^2 b^2} \right) (9 - 3\alpha^2) + \left(\frac{b^2 A^2 + a^2 B^2}{6a^2 b^2} \right) (12(1 - \ln(\alpha))) + \frac{6}{a^2 b^2} (Ba^2 \cos(\theta) + Ab^2 \sin(\theta)) + \\
& \quad + \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \right) \cos(2\theta) \Bigg].
\end{aligned}
\tag{1.1.44}$$

При $k_1, k_2, k_3 = 0$ получим результаты, определенные в работе [132], при $a = b = \infty$ - результаты, полученные в [138].

Рассмотрим расположение упругопластической границы трубы с учетом первого приближения в зависимости от параметров неоднородности A, B, a, b .

На рисунке 1.11 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \zeta = 0, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad \delta = 0.05.$$

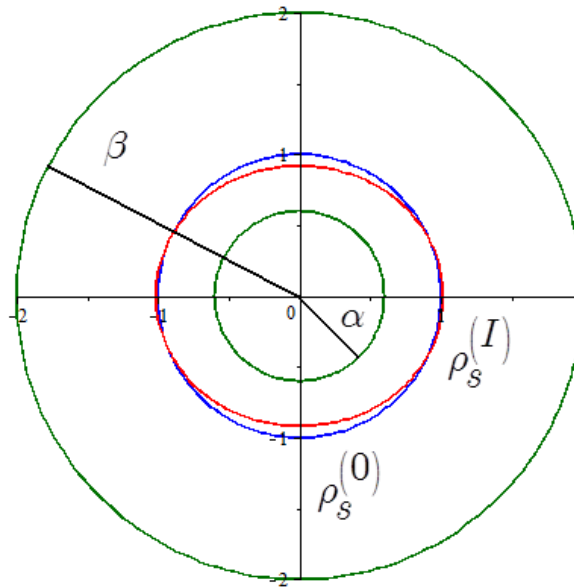


Рисунок 1.11

На рисунке 1.12 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \zeta = 0, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad A = 0.2, \quad B = 0, \quad \delta = 0.05.$$

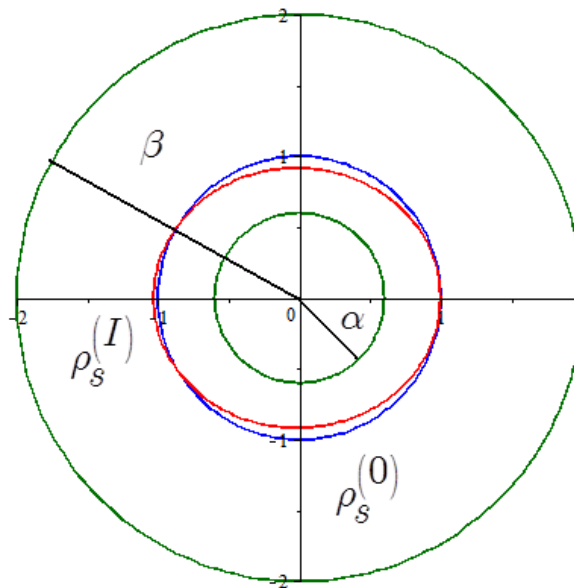


Рисунок 1.12

На рисунке 1.13 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \zeta = 0, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad A = 0, \quad B = 0.2, \quad \delta = 0.05.$$

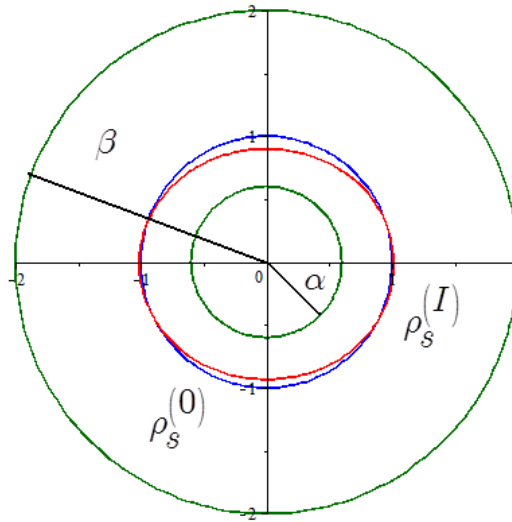


Рисунок 1.13

Рассмотрим динамику изменения расположения упругопластической границы трубы в первом приближении в зависимости от параметров неоднородности ζ .

На рисунке 1.14 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \zeta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad A = 0, \quad B = 0.2, \quad \delta = 0.05.$$

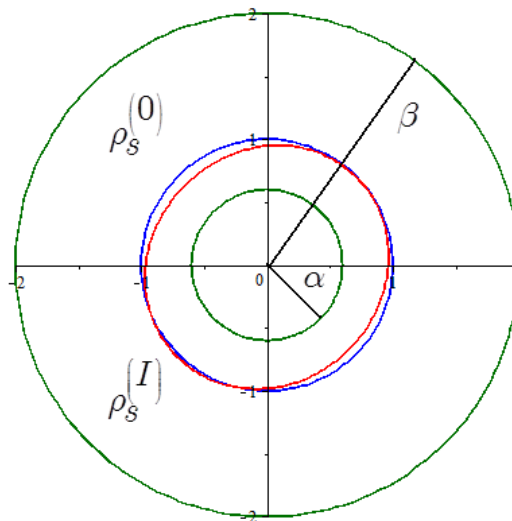


Рисунок 1.14

На рисунке 1.15 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \zeta = \pi, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad A = 0, \quad B = 0.2, \quad \delta = 0.05.$$

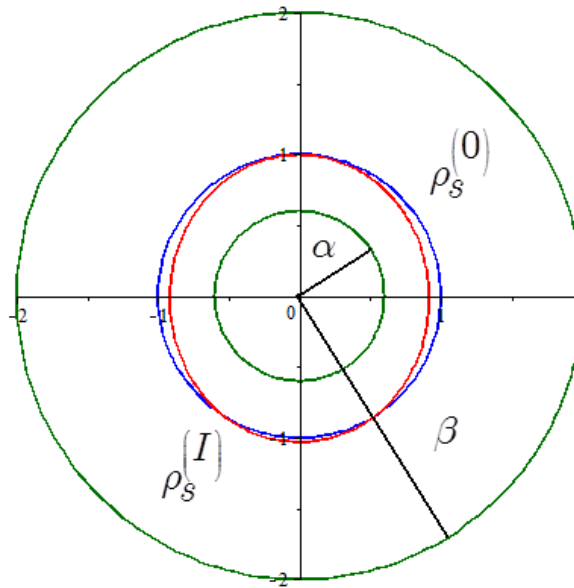


Рисунок 1.15

На рисунке 1.16 представлена граница раздела упругой и пластической областей в нулевом и первом приближении при:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \zeta = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 2, \quad A = 0, \quad B = 0.2, \quad \delta = 0.05.$$

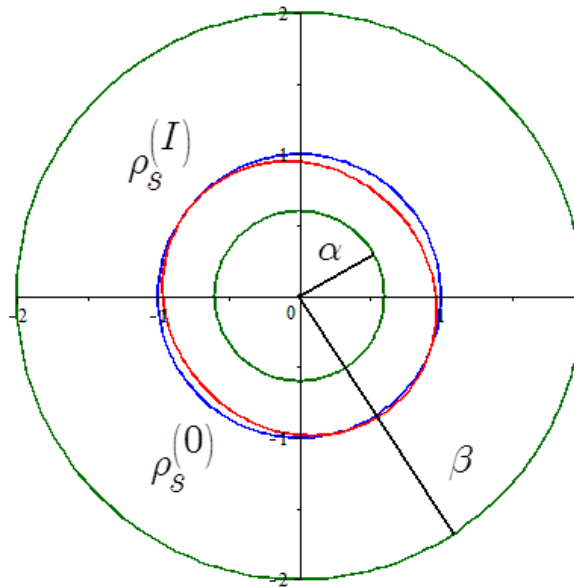


Рисунок 1.16

Определено напряженное состояние в пластической (1.1.37) – (1.1.39) и упругой (1.1.41) – (1.1.43) зонах. Граница пластической зоны определяется из соотношений (1.1.44).

§1.2 Определение деформированного состояния неоднородной трубы

Исследуем деформированное состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления (рисунок 1.1). Пусть e_{ij} – компоненты деформации; $\varepsilon_{ij} = e_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt}$ – компоненты скоростей деформации; u_ρ – компонента перемещения вдоль радиуса ρ ; u_θ – компонента перемещения вдоль угла θ ; $v_\rho = \frac{du_\rho}{dt}$ – компонента скорости перемещения вдоль радиуса ρ ; $v_\theta = \frac{du_\theta}{dt}$ – компонента скорости перемещения вдоль угла θ .

Согласно закону Гука имеем:

$$\begin{cases} e_\rho = \frac{(\sigma_\rho - \mu\sigma_\theta)}{E}, \\ e_\theta = \frac{(\sigma_\theta - \mu\sigma_\rho)}{E}, \\ e_{\rho\theta} = \frac{\tau_{\rho\theta}}{2G}, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

μ – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости, G – модуль сдвига.

Соотношения Коши для деформаций имеют вид:

$$\begin{cases} e_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, e_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \\ e_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \right]. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Согласно [44], ассоциированный закон пластического течения имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\rho}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\rho}}, \\ \varepsilon_{\theta}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\theta}}, \\ \varepsilon_{\rho\theta}^p = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{\rho\theta}}. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Так как в случае малых деформаций $de_{ij} \approx \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} dt$, то соотношения (1.2.3) могут быть проинтегрированы по времени, после чего получим:

$$\begin{cases} e_{\rho}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\rho}}, \\ e_{\theta}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\theta}}, \\ e_{\rho\theta}^p = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{\rho\theta}}. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

1. Предположим, что в пластической области имеет место (1.1.8). С учетом (1.2.4) имеем:

$$\begin{cases} e_{\rho}^p = \lambda \left[\frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{2} - R' \cos(2\theta + \mu) \right], \\ e_{\theta}^p = \lambda \left[\frac{\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}}{2} + R' \cos(2\theta + \mu) \right], \\ e_{\rho\theta}^p = \lambda \left[2\tau_{\rho\theta} - R' \sin(2\theta + \mu) \right]. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Из (1.2.5) имеем уравнение несжимаемости:

$$e_{\rho} + e_{\theta} = 0 \quad (1.2.6)$$

и соотношение

$$\frac{e_{\rho\theta}}{e_{\rho} - e_{\theta}} = \frac{\tau_{\rho\theta} - R' \sin(2\theta + \zeta)}{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} - 2R' \cos(2\theta + \zeta)}. \quad (1.2.7)$$

Положим:

$$u_\rho = u_\rho^{(0)} + u_\rho^{(I)}\delta + u_\rho^{(II)}\delta^2 + \dots, \quad u_\theta = u_\theta^{(0)} + u_\theta^{(I)}\delta + u_\theta^{(II)}\delta^2 + \dots \quad (1.2.8)$$

Примем в упругой области материал несжимаемым, тогда коэффициент Пуассона $\mu = \frac{1}{2}$.

Напряжённое состояние трубы определено в п.1 в §1.1. В упругой зоне найдем перемещения по определённому выше напряжённому состоянию в упругой зоне.

В нулевом приближении в упругой области согласно [44] компоненты перемещений имеют вид:

$$u_\rho^{(0)e} = \frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[\left(p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) + 3 \left(p - 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right) \beta^2 \right], \quad (1.2.9)$$

$$u_\theta^{(0)e} = 0.$$

Следуя [44] определим компоненты перемещений в первом приближении.

1) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.25) при:

$$a_1'' = (-\alpha^2 c + c), \quad b_1''' = (-\alpha^2 c + c), \quad b_1'' = a_1''' = a_2'' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

В этом случае перемещения примут вид:

$$u_\rho^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left[\frac{15}{14} c_1 \ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} c_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} c_3 \right] \cos(\theta),$$

$$u_\theta^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left[-\frac{15}{14} c_1 \left[\ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{5} \right] + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} c_2 + \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} c_3 \right] \sin(\theta), \quad (1.2.10)$$

где

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{(\alpha^2 c - c)\beta}{2(\beta^4 - 1)}.$$

2) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.25) при:

$$b_1'' = (-\alpha^2 d + d), \quad a_1''' = (\alpha^2 d - d), \quad b_1''' = a_1'' = a_2'' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin(\theta), \\ u_{\theta}^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[\ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{5} \right] - \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos(\theta), \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^2 d - d)\beta}{2(\beta^4 - 1)}.$$

3) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.25) при

$$\begin{aligned} a_2'' &= -R' \alpha \cos(\zeta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] + R' \cos(\zeta), \\ b_2'' &= R' \sin(\zeta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] - R' \sin(\zeta), \\ b_1''' &= a_1'' = b_1'' = a_1''' = a_2''' = b_2''' = 0. \end{aligned}$$

В этом случае коэффициенты перемещения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(-3\check{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\check{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\check{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\check{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) \left(a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta) \right), \\ u_{\theta}^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(3\check{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\check{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\check{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \check{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) \left(a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta) \right), \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \check{c}_1 &= \left(\frac{-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}}{2N} \right), \quad \check{c}_2 = \left(\frac{-3 + 2\beta^2 + \beta^4}{6N} \right) \beta^{-4}, \\ \check{c}_3 &= \left(\frac{-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}}{6N} \right) \beta^2, \quad \check{c}_4 = \left(\frac{-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}, \\ N &= 6 - 4(\beta^2 + \beta^{-2}) + (\beta^4 + \beta^{-4}). \end{aligned}$$

4) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.25)

при

$$\begin{aligned} a_2''' &= R' \alpha \sin(\zeta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] - R' \sin(\zeta), \\ b_2''' &= R' \alpha \cos(\zeta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] - R' \cos(\zeta), \\ b_1''' &= a_1'' = b_1'' = a_1''' = a_2'' = b_2'' = 0. \end{aligned}$$

Перемещения примут вид:

$$\begin{aligned} u_\rho^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) \left(-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta) \right), \\ u_\theta^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) \left(a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta) \right), \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \left(\frac{4 - 4\beta^2}{4N} \right), \quad \tilde{c}_2 = \left(\frac{4\beta^2 - 4\beta^4}{12N} \right) \beta^{-4}, \\ \tilde{c}_3 &= \left(\frac{3 - 4\beta^{-2} + \beta^{-4}}{12N} \right) \beta^2, \quad \tilde{c}_4 = \left(\frac{-1 + \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}. \end{aligned}$$

Итоговое перемещение в упругой области определяется как сумма перемещений (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12), (1.2.13).

$$\begin{aligned} u_\rho^{(I)e} &= -\frac{1}{4} (\alpha^2 - 1) (-3\beta^4 + \rho^4) \left(\frac{c \cos(\zeta) + d \sin(\zeta)}{\rho^2 E (\beta^4 - 1)} \right) + \\ &+ \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) \left(a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta) \right) + \\ &+ \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) \left(-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(I)e} = & -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1) \left(3\beta^4 + 11\rho^4 \right) \left(\frac{-c \sin(\theta) + d \cos(\theta)}{\rho^2 E (\beta^4 - 1)} \right) + \\
& + \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)) + \\
& + \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta)).
\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

В нулевом приближении (1.2.6) имеет вид:

$$e_{\rho}^{(0)} + e_{\theta}^{(0)} = 0. \tag{1.2.15}$$

Положим, что компонента перемещений $u_{\theta}^{(0)}$ вдоль θ равна нулю: $u_{\theta}^{(0)} = 0$.

Из (1.2.15) согласно нашему предположению, имеем:

$$\frac{du_{\rho}^{(0)}}{d\rho} + \frac{u_{\rho}^{(0)}}{\rho} = 0. \tag{1.2.16}$$

Решение уравнения (1.2.16) имеет вид:

$$u_{\rho}^{(0)} = \frac{C}{\rho}, \quad C - const. \tag{1.2.17}$$

Из (1.2.2) и (1.2.17) получим:

$$e_{\rho}^{(0)} = \frac{du_{\rho}^{(0)}}{d\rho} = -\frac{C}{\rho^2}, \quad e_{\theta}^{(0)} = \frac{u_{\rho}^{(0)}}{\rho} = \frac{C}{\rho^2}, \quad e_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \tag{1.2.18}$$

Из (1.2.9), (1.2.17) в пластической области получим:

$$u_{\rho}^{(0)p} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{2(\beta^2 - 1)E} \left[\left(p - 2 \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) + 3 \left(p - 2 \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \beta^2 \right] \right] \tag{1.2.19}$$

Воспользуемся (1.2.2) и (1.2.6) для нахождения компонент перемещения в первом приближении

$$e_{\rho}^{(I)} + e_{\theta}^{(I)} = 0, \quad e_{\rho}^{(I)} = \frac{\partial u_{\rho}^{(I)}}{\partial \rho}, \quad e_{\theta}^{(I)} = \frac{u_{\rho}^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\theta}^{(I)}}{\partial \theta}, \quad (1.2.20)$$

откуда

$$\frac{\partial u_{\rho}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{u_{\rho}^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\theta}^{(I)}}{\partial \theta} = 0. \quad (1.2.21)$$

Из (1.2.7) получим:

$$\left(\sigma_{\rho}^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)} \right) e_{\rho\theta}^{(I)} = \left(e_{\rho}^{(0)} - e_{\theta}^{(0)} \right) \left(\tau_{\rho\theta}^{(I)} - R' \sin(2\theta + \zeta) \right). \quad (1.2.22)$$

Из (1.2.2) в первом приближении имеем:

$$e_{\rho\theta}^{(I)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\theta}^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}^{(I)}}{\partial \theta} \right). \quad (1.2.23)$$

Из (1.2.18), (1.2.22), (1.2.23) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\theta}^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\theta}^{(I)}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}^{(I)}}{\partial \theta} &= \frac{2C}{\rho^2} \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right) \left(c \sin(\zeta) - d \cos(\zeta) \right) + \\ &+ \frac{2cR'}{\rho^2} \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \right] - 2 \right\} \sin(2\theta + \zeta). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Удовлетворим (1.2.24), предполагая

$$u_{\rho}^{(I)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_{\theta}^{(I)} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (1.2.25)$$

Из (1.2.24) согласно (1.2.25) имеем:

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= 2C \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right) \left(c \sin(\theta) - d \cos(\theta) \right) + \\ &+ 2cR' \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \right] - 2 \right\} \sin(2\theta + \zeta). \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Решение уравнения (1.2.26) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения (1.2.26) имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi_{chastn} = C \left(2\rho (\ln \rho)^2 - \frac{\alpha^2}{2\rho} \right) & \left(c \sin(\theta) - d \cos(\theta) \right) + (d_2 \ln(\rho) + d_1) \rho (\sin(\theta) - \cos(\theta)) + \\ & + \left(\frac{1}{\rho} [S \sin(\omega) + T \cos(\omega)] + Q \right) \sin(2\theta + \zeta), \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

где

$$\begin{aligned} \omega = \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad D = 2CR', \quad S = -\frac{\sqrt{3}\alpha D}{8}, \quad T = -\frac{\alpha D}{8}, \\ Q = -\frac{D}{2}, \quad C, \quad d_2, \quad d_1 - const. \end{aligned}$$

Из (1.2.25), (1.2.27) имеем

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(I)}_{chastn} = -C \left(2\rho (\ln \rho)^2 - \frac{\alpha^2}{2\rho} \right) & \left(c \cos(\theta) + d \sin(\theta) \right) - \frac{1}{\rho} (d_2 \ln \rho + d_1) (\cos(\theta) + \sin(\theta)) - \\ & - \frac{2 \left([S \sin(\omega) + T \cos(\omega)] + Q\rho \right)}{\rho^2} \cos(2\theta + \zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(I)}_{chastn} = C \left(\frac{\alpha^2}{2\rho^2} + 2(\ln(\rho))^2 + 4 \ln(\rho) \right) & \left(c \sin(\theta) - d \cos(\theta) \right) + d_2 (\sin(\theta) - \cos(\theta)) + \\ & + (d_2 \ln(\rho) + d_1) (\sin(\theta) - \cos(\theta)) - \\ & - \frac{\left((S + T\sqrt{3}) \sin(\omega) + (T - S\sqrt{3}) \cos(\omega) \right)}{\rho^2} \sin(2\theta + \zeta). \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Согласно (1.2.25), компоненты перемещений в пластической области, соответствующие решению однородного уравнения (1.2.26) имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_{\rho \, o d n}^{(I)p} &= -(\check{c}_{11} + \check{c}_{12} \ln(\rho)) \cos(\theta) - (\bar{\check{c}}_{11} + \bar{\check{c}}_{12} \ln(\rho)) \sin(\theta) - \\
-2 \left\{ \left[c_{11} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) + c_{12} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right] \sin(2\theta) - \left[c_{21} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) + c_{22} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right] \cos(2\theta) \right\}, \\
u_{\rho \, o d n}^{(I)p} &= (\check{c}_{11} + \check{c}_{12} (1 + \ln(\rho))) \sin(\theta) + (\bar{\check{c}}_{11} + \bar{\check{c}}_{12} (1 + \ln(\rho))) \cos(\theta) + \\
+ \left[c_{11} \left(\cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right) + c_{12} \left(\sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right) \right] \sin(2\theta) + \\
+ \left[c_{21} \left(\cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right) + c_{22} \left(\sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right) \right] \cos(2\theta).
\end{aligned} \tag{1.2.29}$$

На упругопластической границе имеют место условия сопряжения

$$u_{\rho}^{(I)p} = u_{\rho}^{(I)e}, \quad u_{\theta}^{(I)p} = u_{\theta}^{(I)e}, \quad \text{при } \rho = 1 \tag{1.2.30}$$

Из (1.2.14), (1.2.28)-(1.2.30) имеем

$$\begin{aligned}
\check{c}_{11} &= \frac{\left((-3\alpha^2 + 3)\beta^4 + \alpha^2 - 1 + 2CE\alpha^2 \right) c}{4E} - d_1, \\
\check{c}_{12} &= \frac{\left(3\alpha^2 - 3 \right) a\beta^8 + \left(\left(1 + (-4CE - 1)\alpha^2 \right) C - 4d_2E \right) \beta^4 + \left(-12 + (12 + 4cE)\alpha^2 \right) c + 4d_2E}{4E(\beta^4 - 1)}, \\
\bar{\check{c}}_{11} &= \frac{\left((2CE\alpha^2 - 3\alpha^2 + 3)d - 4d_1E \right) \beta^4 + \left(-2CE\alpha^2 + \alpha^2 - 1 \right) d + 4d_1E}{4E(\beta^4 - 1)}, \\
\bar{\check{c}}_{12} &= \frac{(d_2 + 2d_1)E\beta^4 + (-d_2 - 2d_1)E + (-3\alpha^2 + 3)d}{E(\beta^4 - 1)}.
\end{aligned} \tag{1.2.31}$$

$$c_{21} = A_1 + A_2 + A_3, \tag{1.2.32}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{b_2'''(-4\tilde{c}_4\beta^4 + 2\tilde{c}_3 - 3\tilde{c}_2\beta^6 + 3c_1\beta^2)}{2\beta^2 E}, \\
A_2 &= \frac{a_2''(-4\tilde{c}_4\beta^4 + 2\tilde{c}_3 - 3\tilde{c}_2\beta^6 + 3\tilde{c}_1\beta^2)}{2\beta^2 E}, \\
A_3 &= \cos(\zeta) \left(S \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - T \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - Q \right). \\
c_{22} &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7, \tag{1.2.33}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} T \left((\cos(\zeta) + \sin(\zeta)) \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} \sin(\zeta) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right), \\
B_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} S \left((\cos(\zeta) + \sin(\zeta)) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \sin(\zeta) \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right), \\
B_3 &= \frac{\sqrt{3} b_2'''(1.5\tilde{c}_2\beta^6 - \tilde{c}_3 - 1.5\tilde{c}_1\beta^2 + 2\tilde{c}_4\beta^4)}{3\beta^2 E}, \\
B_4 &= \frac{\sqrt{3} b_2''(-3\tilde{c}_2\beta^6 - 7\tilde{c}_3 - 3\tilde{c}_1\beta^2 + \tilde{c}_4\beta^4)}{3\beta^2 E}, \\
B_5 &= \frac{\sqrt{3} a_2''' \left((7\tilde{c}_3 + 3\tilde{c}_1\beta^2 - \tilde{c}_4\beta^4) \tilde{c}_2 \left(\frac{1}{\beta^3} \right) + 3\beta^3 \right)}{3\beta^2 E \tilde{c}_2 \left(\frac{1}{\beta^3} \right)}, \\
B_6 &= \frac{\sqrt{3} a_2''(1.5\tilde{c}_2\beta^6 - \tilde{c}_3 - 1.5\tilde{c}_1\beta^2 + 2\tilde{c}_4\beta^4)}{3\beta^2 E}, \\
B_7 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\zeta) Q.
\end{aligned}$$

$$c_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_3, \tag{1.2.34}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{b_2''(2\tilde{c}_3 - 4\tilde{c}_4\beta^4 + 3\tilde{c}_1\beta^2 - 3\tilde{c}_2\beta^6)}{2\beta^2 E}, \\
Z_2 &= \frac{a_2'''(-2\tilde{c}_3 + 4\tilde{c}_4\beta^4 - 3\tilde{c}_1\beta^2 + 3\tilde{c}_2\beta^6)}{2\beta^2 E}, \\
Z_3 &= \sin(\zeta) \left(Q - S \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + T \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right).
\end{aligned}$$

$$c_{12} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7, \quad (1.2.35)$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} T \left((\cos(\zeta) - \sin(\zeta)) \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \cos(\zeta) \right), \\
L_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} S \left((\cos(\zeta) - \sin(\zeta)) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \cos(\zeta) \right), \\
L_3 &= -\frac{\sqrt{3} b_2'''}{3\beta^2 E \tilde{c}_2 \left(\frac{1}{\beta^3} \right)} \left((\tilde{c}_4\beta^4 - 7\tilde{c}_3 - 3\tilde{c}_1\beta^2) \tilde{c}_2 \left(\frac{1}{\beta^3} \right) - 3\beta^3 \right), \\
L_4 &= -\frac{\sqrt{3} b_2''}{3\beta^2 E} \left(1.5\tilde{c}_1\beta^2 - 1.5\tilde{c}_2\beta^6 - 2\tilde{c}_4\beta^4 + \tilde{c}_3 \right), \\
L_5 &= -\frac{\sqrt{3} a_2'''}{3\beta^2 E} \left(-1.5\tilde{c}_1\beta^2 + 1.5\tilde{c}_2\beta^6 + 2\tilde{c}_4\beta^4 - \tilde{c}_3 \right), \\
L_6 &= -\frac{\sqrt{3} a_2''}{3\beta^2 E} \left(-3\tilde{c}_1\beta^2 - 3\tilde{c}_2\beta^6 + \tilde{c}_4\beta^4 - 7\tilde{c}_3 \right), \\
L_7 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\zeta) Q.
\end{aligned}$$

2. Исследуем деформированное состояние толстостенной трубы (рисунок 1.1), в предположении, что в пластической области имеет место (1.1.34).

Положим (1.2.8). Напряжённое состояние трубы определено в работе в п.2 §1.1. В упругой зоне найдем перемещения по определённому выше напряжённому состоянию в упругой зоне.

В нулевом приближении в упругой области согласно [44] компоненты перемещений имеют вид (1.2.9).

Следуя [44] определим компоненты перемещений в первом приближении.

1) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.40) при

$$a_0'' = -\frac{2}{a^2 b^2} \left(A^2 b^2 + B^2 a^2 \right) \ln(\alpha),$$

$$a_0''' = a_1'' = a_1''' = a_2'' = b_1'' = b_1''' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

Тогда перемещения примут вид

$$u_{\rho}^{(I)e} = \frac{\left(b^2 A^2 + a^2 B^2 \right) \ln(\alpha) \left(\rho^2 + 3\beta^2 \right)}{\rho \left(\beta^2 - 1 \right) E a^2 b^2}, \quad (1.2.36)$$

$$u_{\theta}^{(I)e} = 0.$$

2) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.40) при

$$a_1'' = \frac{2A}{a^2} \left(1 - \alpha^2 \right), \quad b_1''' = -\frac{2A}{a^2} \left(\alpha^2 - 1 \right),$$

$$a_0''' = a_0'' = a_1''' = a_2'' = b_1'' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

В этом случае получим

$$u_{\rho}^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} c_1 \ln\left(\frac{\rho}{\beta}\right) + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} c_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} c_3 \right) \cos(\theta),$$

$$u_{\theta}^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left(-\frac{15}{14} c_1 \left[\ln\left(\frac{\rho}{\beta}\right) + \frac{3}{5} \right] + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} c_2 + \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} c_3 \right) \sin(\theta), \quad (1.2.37)$$

где

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{(\alpha^2 - 1)\beta}{(\beta^4 - 1)} \frac{A}{a^2}.$$

3) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.40) при

$$b_1'' = \frac{2\beta}{b^2} (1 - \alpha^2), \quad a_1''' = \frac{2\beta}{b^2} (\alpha^2 - 1),$$

$$a_0''' = a_0'' = a_1'' = a_2'' = b_1''' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

Перемещения примут вид

$$u_\rho^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \sin(\theta),$$

$$u_\theta^{(I)e} = \frac{\beta}{E} \left(\frac{15}{14} \hat{c}_1 \left[\ln \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{3}{5} \right] - \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\rho^2} \hat{c}_2 - \frac{11}{2} \frac{\rho^2}{\beta^2} \hat{c}_3 \right) \cos(\theta), \quad (1.2.38)$$

где

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \frac{(\alpha^2 - 1)\beta}{(\beta^4 - 1)} \frac{B}{b^2}.$$

4) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.40) при

$$a_2'' = \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) \cos(\zeta) - \sqrt{3}\alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \cos(\zeta) - \frac{\alpha^3(b^2 - a^2)}{3a^2b^2},$$

$$b_2'' = \left(\frac{R'\alpha^2}{a^2} - R'\alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) (-\sin(\zeta)) - \sqrt{3}\alpha R' \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \sin(\zeta),$$

$$a_0''' = a_0'' = a_1''' = b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_2''' = b_2''' = 0.$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned}
u_{\rho}^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left[-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right] (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)), \\
u_{\theta}^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left[3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right] (a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)),
\end{aligned}
\tag{1.2.39}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_1 &= \left(\frac{-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}}{2N} \right), & \tilde{c}_2 &= \left(\frac{-3 + 2\beta^2 + \beta^4}{6N} \right) \beta^{-4}, \\
\tilde{c}_3 &= \left(\frac{-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}}{6N} \right) \beta^2, & \tilde{c}_4 &= \left(\frac{-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}.
\end{aligned}$$

5) Предположим, что на упругопластической границе имеет место (1.1.40)

при

$$\begin{aligned}
a_2''' &= R' \alpha \sin(\eta) \left[\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right], \\
b_2''' &= R' \alpha \left(\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) + \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \cos(\zeta) + \\
&+ \frac{\alpha^3 (a^2 - b^2)}{6a^2 b^2} \left(3 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) + \frac{b^2 - a^2}{2a^2 b^2}, \\
a_0''' &= a_0'' = a_1''' = b_1''' = a_1'' = b_1'' = a_2'' = b_2'' = 0.
\end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
u_{\rho}^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left[-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right] (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)), \\
u_{\theta}^{(I)e} &= \frac{\beta}{E} \left[3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right] (a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta)),
\end{aligned}
\tag{1.2.40}$$

где

$$\tilde{c}_1 = \left(\frac{4 - 4\beta^2}{4N} \right), \quad \tilde{c}_2 = \left(\frac{4\beta^2 - 4\beta^4}{12N} \right) \beta^{-4},$$

$$\tilde{c}_3 = \left(\frac{3 - 4\beta^{-2} + \beta^{-4}}{12N} \right) \beta^2, \quad \tilde{c}_4 = \left(\frac{-1 + \beta^4}{2N} \right) \beta^{-2}.$$

Результирующее перемещение в упругой области определяется как сумма перемещений (1.2.36), (1.2.37), (1.2.38), (1.2.39), (1.2.40).

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(I)e} = & - \frac{(\alpha^2 - 1)(\rho^4 - 3\beta^4)(Ab^2 \cos(\theta) + Ba^2 \sin(\theta))}{2\rho^2 a^2 (\beta^4 - 1) Eb^2} + \\ & + \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)) + \\ & + \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)) + \\ & + \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2)(\rho^3 + 3\beta^2) \ln(\alpha)}{\rho(\beta^2 - 1) Ea^2 b^2}, \\ u_{\theta}^{(I)e} = & \frac{(\alpha^2 - 1)(11\rho^4 + 3\beta^4)(Ab^2 \sin(\theta) - Ba^2 \cos(\theta))}{2\rho^2 a^2 (\beta^4 - 1) Eb^2} + \\ & + \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)) + \\ & + \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta)). \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

В нулевом приближении компоненты перемещений примут вид (1.2.19).

Из (1.2.18), (1.2.22), (1.2.23) получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{\theta}^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{u_{\theta}^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}^{(I)p}}{\partial \theta} &= \frac{4c}{a^2 b^2 \rho^3} \left(B a^2 \cos(\theta) - A b^2 \sin(\theta) \right) (\alpha^2 - \rho^2) + \\
&+ \frac{2cR'}{\rho^2} \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \right) \right] - 1 \right\} \sin(2\theta + \zeta) + \\
&+ \frac{2c\alpha^3 (a^2 - b^2) \left[3 \cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \right) \right] \sin 2\theta}{6\rho^3 a^2 b^2} + \\
&+ \frac{c}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{1.2.42}$$

Удовлетворим (1.2.42), предполагая (1.2.25). Тогда из (1.2.42) согласно (1.2.25) имеем:

$$\begin{aligned}
\rho^2 \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= \frac{4c}{a^2 b^2 \rho} \left(B a^2 \cos(\theta) - A b^2 \sin(\theta) \right) (\alpha^2 - \rho^2) + \\
&+ 2cR' \left\{ \frac{\alpha}{\rho} \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \right) \right] - 1 \right\} \sin(2\theta + \zeta) + \\
&+ \frac{c\alpha^3 (a^2 - b^2) \left[3 \cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \right) \right] \sin(2\theta)}{3\rho a^2 b^2} + \\
&+ \frac{\rho^2 c}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin(2\theta).
\end{aligned} \tag{1.2.43}$$

Решение уравнения (1.2.43) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения (1.2.43) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\psi_{chastn} = & \frac{c\alpha^2}{\rho} \left(\frac{B}{b^2} \cos(\theta) - \frac{A}{a^2} \sin(\theta) \right) + 2c\rho \ln^2(\rho) \left(\frac{A}{a^2} \sin(\theta) - \frac{B}{b^2} \cos(\theta) \right) + \\
& + (d_2 \ln(\rho) + d_1) \rho (\sin(\theta) - \cos(\theta)) + \frac{c}{4a^2b^2} (b^2 - a^2) \rho^2 \sin(2\theta) + \\
& + \left(\frac{1}{\rho} [S \sin(\omega) + T \cos(\omega)] + Q \right) \sin(2\theta + \zeta) + \\
& + \frac{1}{\rho} [S_1 \sin(\omega) + T_1 \cos(\omega)] \frac{(a^2 - b^2) \alpha^3 \sin(2\theta)}{3a^2b^2},
\end{aligned} \tag{1.2.44}$$

где

$$\omega = \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad D = 2cR', \quad S = -\frac{\sqrt{3}\alpha D}{8}, \quad T = -\frac{\alpha D}{8},$$

$$Q = -\frac{D}{4}, \quad c, \quad d_2, \quad d_1 - const,$$

$$D_1 = -\frac{c}{8}, \quad S_1 = \sqrt{3}D_1, \quad T_1 = -3D_1.$$

Из (1.2.25), (1.2.44) имеем:

$$\begin{aligned}
u_{\rho}^{(I)p}{}_{chastn} = & \frac{1}{6\rho^2b^2a^2} \left(\left[-12 \cos(2\theta + \eta) a^2b^2T - 4T_1\alpha^3(a^2 - b^2) \cos(2\theta) \right] \cos(\omega) + \right. \\
& + \left[-12 \cos(2\theta + \zeta) a^2b^2S - 4S_1\alpha^3(a^2 - b^2) \cos(2\theta) \right] \sin(\omega) - \\
& - 12 \cos(2\theta + \zeta) a^2b^2Q\rho + 3c\rho^3(a^2 - b^2) \cos(2\theta) - \\
& - 12b^2 \left(\frac{-c\alpha^2A}{2} + c\rho^2A \ln^2(\rho) + \frac{1}{2} \rho^2a^2d_2 \ln(\rho) + \frac{1}{2} \rho^2a^2d_1 \right) \cos(\theta) - \\
& \left. - 12a^2 \left(\frac{-c\alpha^2B}{2} + c\rho^2B \ln^2(\rho) + \frac{1}{2} \rho^2b^2d_2 \ln(\rho) + \frac{1}{2} \rho^2b^2d_1 \right) \sin(\theta) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(I)p}{}_{chastn} = & \frac{1}{6\rho^2 b^2 a^2} \left[\left[6a^2 b^2 (S\sqrt{3} - T) \sin(2\theta + \zeta) + 2\alpha^3 (a^2 - b^2) (\sqrt{3}S_1 - T_1) \sin(2\theta) \right] \cos(\omega) + \right. \\
& + \left[-6a^2 b^2 (T\sqrt{3} + S) \sin(2\theta + \zeta) - 2\alpha^3 (a^2 - b^2) (\sqrt{3}T_1 + S_1) \sin(2\theta) \right] \sin(\omega) - \\
& - 3c\rho^3 (a^2 - b^2) \sin(2\theta) - \\
& - 12a^2 \left(c\rho^2 B \ln^2(\rho) + 2 \left(cB + \frac{1}{4} d_2 b^2 \right) \rho^2 \ln(\rho) + \frac{1}{2} \rho^2 b^2 (d_1 + d_2) + \frac{1}{2} c\alpha^2 B \right) \cos(\theta) + \\
& + 12b^2 \left(c\rho^2 A \ln^2(\rho) + 2 \left(cA + \frac{1}{4} d_2 a^2 \right) \rho^2 \ln(\rho) + \frac{1}{2} \rho^2 a^2 (d_1 + d_2) + \frac{1}{2} c\alpha^2 A \right) \sin(\theta) \right].
\end{aligned} \tag{1.2.45}$$

Согласно(1.2.25), компоненты перемещений в пластической области, соответствующие решению однородного уравнения (1.2.43) имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_{\rho}^{(I)p}{}_{odn} = & \frac{c_{00}}{\rho} - (\check{c}_{11} + \check{c}_{12} \ln(\rho)) \cos(\theta) - (\bar{\check{c}}_{11} + \bar{\check{c}}_{12} \ln \rho) \sin(\theta) - \\
- 2 \left\{ \left[c_{11} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) + c_{12} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right] \sin(2\theta) - \left[c_{21} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) + c_{22} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right] \cos(2\theta) \right\}, \\
u_{\theta}^{(I)p}{}_{odn} = & (\check{c}_{11} + \check{c}_{12} (1 + \ln(\rho))) \sin(\theta) + (\bar{\check{c}}_{11} + \bar{\check{c}}_{12} (1 + \ln(\rho))) \cos(\theta) + \\
+ \left[c_{11} \left(\cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right) + c_{12} \left(\sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right) \right] \sin(2\theta) + \\
+ \left[c_{21} \left(\cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right) + c_{22} \left(\sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right) \right] \cos(2\theta).
\end{aligned} \tag{1.2.46}$$

На упругопластической границе имеют место (1.2.30).

Из (1.2.41), (1.2.45), (1.2.46), а также (1.2.30) получим:

$$\check{c}_{11} = \frac{0.5 \left(3\beta^4 - 3\alpha^2 \beta^4 - 2c\alpha^2 E + 2c\alpha^2 E \beta^4 - 1 + \alpha^2 \right) A + 0.5 \left(2Ea^2 d_1 - 2Ea^2 d_1 \beta^4 \right)}{a^2 (\beta^4 - 1) E},$$

$$\begin{aligned}
\check{c}_{12} &= \frac{-\left(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2E + 2c\alpha^2E\beta^4 + 5 - 5\alpha^2\right)A - \left(-Ea^2d_2 + Ea^2d_2\beta^4\right)}{a^2\left(\beta^4 - 1\right)E}, \\
\bar{\check{c}}_{11} &= \frac{0.5\left(3\beta^4 - 3\alpha^2\beta^4 - 2c\alpha^2E + 2c\alpha^2E\beta^4 - 1 + \alpha^2\right)B + 0.5\left(2Eb^2d_1 - 2Eb^2d_1\beta^4\right)}{b^2\left(\beta^4 - 1\right)E}, \\
\bar{\check{c}}_{12} &= \frac{-\left(6\alpha^2 - 6\right)B - \left(2Eb^2d_1 - d_2b^2E\beta^4 - 2Eb^2d_1\beta^4 + d_2b^2E\right)}{b^2\left(\beta^4 - 1\right)E}.
\end{aligned} \tag{1.2.47}$$

$$c_{21} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5, \tag{1.2.48}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\left(a^4b^4S \cos(\zeta) + \frac{1}{3}\alpha^3S_1\left(a^2 - b^2\right)\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln(\alpha)\right)}{a^2b^2}, \\
A_2 &= \frac{-a\left(T_1\left(a^2 - b^2\right) + 3b^4Ta \cos(\zeta)\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln(\alpha)\right)}{3b^2}, \\
A_3 &= \frac{b_2'''\left(3\beta^6\check{c}_2 + 4\beta^4\check{c}_4 - 3\beta^2\check{c}_1 - 2\check{c}_3\right)}{2\beta^2E}, \\
A_4 &= \frac{a_2''\left(-3\beta^6c_2 - 4\beta^4c_4 + 3\beta^2c_1 + 2c_3\right)}{2\beta^2E}, \\
A_5 &= \frac{-\left(4a^4b^4Q \cos(\zeta) + c\left(b^2 - a^2\right)\right)}{4a^2b^2}.
\end{aligned}$$

$$c_{22} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 + B_9, \tag{1.2.49}$$

где

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\sqrt{3}aT_1(a^2 - b^2)\cos(\sqrt{3}\ln(\alpha))}{9b^2}, \\
B_2 &= \frac{\sqrt{3}\alpha^3S_1(b^2 - a^2)\sin(\sqrt{3}\ln(\alpha))}{9a^2b^2}, \\
B_3 &= \frac{\sqrt{3}T\left([a^2b^2\cos(\zeta) - \sin(\zeta)]\cos(\sqrt{3}\ln(\alpha)) - [\sqrt{3}\sin(\zeta)]\sin(\sqrt{3}\ln(\alpha))\right)}{3}, \\
B_4 &= \frac{\sqrt{3}S\left(-[a^2b^2\cos(\zeta) + \sin\zeta]\sin(\sqrt{3}\ln(\alpha)) - [\sqrt{3}\sin(\zeta)]\cos(\sqrt{3}\ln(\alpha))\right)}{3}, \\
B_5 &= \frac{-\sqrt{3}b_2'''\left(3\beta^6\tilde{c}_2 + 4\beta^4\tilde{c}_4 - 3\tilde{c}_1 - 2\tilde{c}_3\right)}{6\beta^2E}, \\
B_6 &= \frac{\sqrt{3}b_2''\left(-3\beta^6c_2 + \beta^4c_4 - 3c_1\beta^2 - 7c_3\right)}{3\beta^2E}, \\
B_7 &= \frac{-\sqrt{3}a_2'''\left((-7\tilde{c}_3 - 3\tilde{c}_1\beta^2 + \tilde{c}_4\beta^4)\hat{c}_2\left(\frac{1}{\beta^3}\right) - 3\beta^3\right)}{3\beta^2Ec_2\left(\frac{1}{\beta^3}\right)}, \\
B_8 &= \frac{-\sqrt{3}a_2''\left(-3c_2\beta^6 - 4c_4\beta^4 + 2c_3 + 3c_1\beta^2\right)}{6\beta^2E}, \\
B_9 &= \frac{\sqrt{3}\left(4a^4b^4Q\cos(\zeta) + c(b^2 - a^2)\right)}{12a^2b^2}.
\end{aligned}$$

$$c_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5, \quad (1.2.50)$$

где

$$\begin{aligned}
Z_1 &= a^2b^2\cos(\sqrt{3}\ln(\alpha))T\sin(\zeta), \\
Z_2 &= -a^2b^2\sin(\sqrt{3}\ln(\alpha))S\sin(\zeta),
\end{aligned}$$

$$Z_3 = \frac{0.5b_2''(-4c_4\beta^4 - 3c_2\beta^6 + 3c_1\beta^2 + 2c_3)}{\beta^2 E},$$

$$Z_4 = \frac{0.5a_2'''(4\tilde{c}_4\beta^4 + 3\tilde{c}_2\beta^6 - 3\tilde{c}_1\beta^2 - 2\tilde{c}_3)}{\beta^2 E},$$

$$Z_5 = a^2 b^2 Q \sin(\zeta).$$

$$c_{12} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7, \quad (1.2.51)$$

где

$$L_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} T \left(\left(\cos(\zeta) + a^2 b^2 \sin(\zeta) \right) \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \cos(\zeta) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right),$$

$$L_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} S \left(\left(\cos(\zeta) - a^2 b^2 \sin(\zeta) \right) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3} \cos(\zeta) \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right),$$

$$L_3 = \frac{0.1924 T_1 \alpha^3 \left((a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} (a^2 - b^2) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right)}{a^2 b^2},$$

$$L_4 = \frac{-0.333 S_1 \alpha^3 \left((a^2 - b^2) \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 0.577 (b^2 - a^2) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right)}{a^2 b^2},$$

$$L_5 = \frac{\sqrt{3} \tilde{c}_2 b_2''' \beta^4}{E} - \frac{0.577 \tilde{c}_4 b_2''' \beta^2}{E} + \frac{1.73 \tilde{c}_1 b_2'''}{E} + \frac{4.04 \tilde{c}_3 b_2'''}{E \beta^2},$$

$$L_6 = \frac{0.866 c_2 b_2'' \beta^4}{E} + \frac{1.154 c_4 b_2'' \beta^2}{E} - \frac{0.866 c_1 b_2''}{E} - \frac{0.577 c_3 b_2''}{E \beta^2},$$

$$L_7 = -\frac{0.866 \tilde{c}_2 a_2''' \beta^4}{E} - \frac{1.154 \tilde{c}_4 a_2''' \beta^2}{E} + \frac{0.866 \tilde{c}_1 a_2'''}{E} + \frac{0.577 \tilde{c}_3 a_2'''}{E \beta^2},$$

$$L_8 = \frac{1.732 c_2 a_2'' \beta^4}{E} - \frac{0.577 c_4 a_2'' \beta^2}{E} + \frac{1.732 c_1 a_2''}{E} + \frac{4.04 c_3 a_2''}{E \beta^2},$$

$$L_9 = -0.577 a^2 b^2 Q \sin(\zeta) + 0.2886 c \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right),$$

$$c_{00} = \frac{(b^2 A^2 + a^2 B^2) (\rho^3 + 3\beta^2) \ln(\alpha)}{(\beta^2 - 1) E a^2 b^2}. \quad (1.2.52)$$

Глава 2. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ТРУБ

Данная глава посвящена исследованию предельного состояния многослойных труб, находящихся под действием внутреннего давления.

§ 2.1 Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления

Рассмотрим многослойную толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p (рисунок 2.1).

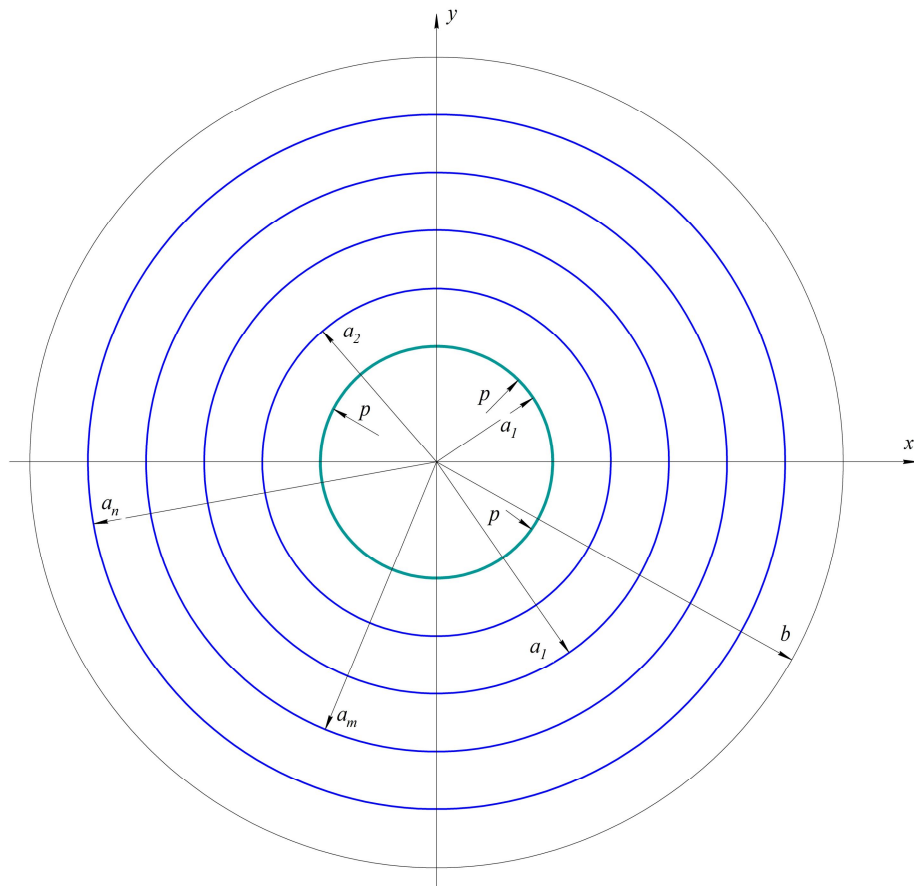


Рисунок 2.1

Предполагается, что труба состоит из m слоев. Обозначим через a_k , a_{k+1} внутренний и внешний радиусы k -го слоя, a_n — внутренний радиус, b — внеш-

ний радиус n – слоя. Предположим, что упругопластическая граница находится в последнем слое.

Условие предельного состояния для n – го слоя примем в виде [43]:

$$\left(\frac{\sigma_{xn} - \sigma_{yn}}{2} - \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + (\tau_{xyn} - k_{3n})^2 = k_n^2, \quad k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_n = \text{const}, \quad (2.1.1)$$

где $\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$ - компоненты напряжения в декартовой системе координат;

k_{1n}, k_{2n}, k_{3n} - константы анизотропии.

В пластической области напряженное состояние определяется из условия пластичности (2.1.1) и уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xn}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xyn}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yn}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xyn}}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Положим:

$$k_{1m} = k^0 + \delta k'_{1m}, \quad k_{2m} = k^0 + \delta k'_{2m}, \quad k_{3m} = \delta k'_{3m}. \quad (2.1.3)$$

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k^0 и обозначим:

$$\frac{k_n}{k^0} = K_n, \quad \frac{p}{k^0} = q.$$

Предположим:

$$\frac{a_n}{\rho_s^{(0)}} = \alpha_n, \quad \frac{b}{\rho_s^{(0)}} = \beta,$$

где $\rho_s^{(0)}$ - радиус пластической границы в нулевом приближении.

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta). \quad (2.1.4)$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_{xn} = \frac{\sigma_{\rho n} + \sigma_{\theta n}}{2} + \frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{\rho\theta n} \sin(2\theta), \\ \sigma_{yn} = \frac{\sigma_{\rho n} + \sigma_{\theta n}}{2} - \frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \cos(2\theta) - \tau_{\rho\theta n} \sin(2\theta), \\ \tau_{xy n} = -\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \sin(2\theta) + \tau_{\rho\theta n} \cos(2\theta). \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Уравнения равновесия (2.1.2) согласно (2.1.5) в полярной системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\rho n}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta n}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta n}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta n}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta n}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Из (2.1.1), (2.1.4), (2.1.5) получим условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \right)^2 + (\tau_{\rho\theta n})^2 - 2R_n \left(\frac{\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}}{2} \right) \cos(2\theta + \zeta_n) - \\ & - 2\tau_{\rho\theta n} R_n \sin(2\theta + \zeta_n) + R_n^2 - K_n^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

где

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + k_{3n}^2}, \quad \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2R_n} = \cos(\zeta_n), \quad \frac{k_{3n}}{R_n} = \sin(\zeta_n),$$

Обозначим: $R_n = \delta R'_n$, $R'_n = \sqrt{\left(\frac{k'_{1n} - k'_{2n}}{2} \right)^2 + k'_{3n}^2}.$

Положим, что компоненты напряжения во всех n слоях зависят от некоторого параметра δ . Решение системы (2.1.6), (2.1.7) определим в виде:

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^{(0)} + \sigma_{ijn}^{(I)}\delta + \sigma_{ijn}^{(II)}\delta^2 + \dots \quad (2.1.8)$$

Предположим, что в исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta n}^{(0)} = 0. \quad (2.1.9)$$

Согласно [44] имеем:

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} = 2K_n \ln(\rho) + C_n, \quad \sigma_{\theta n}^{(0)p} = 2K_n \left(1 + \ln(\rho)\right) + C_n, \quad (2.1.10)$$

где $C_n - \text{const}$.

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление q :

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} \big|_{\rho=\alpha_1} = -q. \quad (2.1.11)$$

Из (2.1.10), (2.1.11) имеет место:

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = -q + 2K_1 \ln\left(\frac{\rho}{\alpha_1}\right), \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = -q + 2K_1 + 2K_1 \ln\left(\frac{\rho}{\alpha_1}\right). \quad (2.1.12)$$

Граничное условие на внутреннем контуре:

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} \big|_{\rho=\alpha_2} = \sigma_{\rho 2}^{(0)p}. \quad (2.1.13)$$

Из (2.1.10), (2.1.12), (2.1.13) получим во внешней пластической области 2:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(0)p} &= -q + 2K_2 \ln\left(\frac{\rho}{\alpha_2}\right) + 2K_1 \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right), \\ \sigma_{\theta 2}^{(0)p} &= -q + 2K_2 \left(1 + \ln\left(\frac{\rho}{\alpha_2}\right)\right) + 2K_1 \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Используя условие сопряжения компонент напряжений на границе n -го слоя трубы:

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \sigma_{\rho_{n-1}}^{(0)p}, \quad \tau_{\rho \theta n}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \tau_{\rho \theta_{n-1}}^{(0)p} \quad (2.1.15)$$

можно найти предельное состояние в n – ом слое в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(0)p} &= -q + 2K_n \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} K_i \ln \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \right), \\ \sigma_{\theta n}^{(0)p} &= -q + 2K_n \left(1 + \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} K_i \ln \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \right). \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Согласно (2.1.8), (2.1.9) из (2.1.7) в первом приближении получим:

$$\sigma'_{\theta n} - \sigma'_{\rho n} = -2(R'_n \cos(2\theta + \zeta_n)). \quad (2.1.17)$$

Уравнения равновесия (2.1.6) удовлетворим, полагая, что:

$$\sigma_{\rho n}^{(I)p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta n}^{(I)p} = \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho \theta n}^{(I)p} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta} \right). \quad (2.1.18)$$

Из (2.1.17) согласно (2.1.18) получим:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2} = -2R'_n \rho^2 \cos(2\theta + \mu_n). \quad (2.1.19)$$

В первом приближении граничные условия согласно [44] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_1} &= 0, \\ \tau_{\rho \theta 1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Предельное состояние во внутренней области 1 будет определяться из (2.1.17) – (2.1.20):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 1}^{(I)p} &= -R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right) \cos(2\theta + \zeta_1), \\
\sigma_{\theta 1}^{(I)p} &= -R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + 1 \right) \cos(2\theta + \zeta_1), \\
\tau_{\rho \theta 1}^{(I)p} &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \right) \sin(2\theta + \zeta_1).
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Запишем (2.1.21) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 1}^{(I)p} &= a_1^1 \cos(2\theta) + a_2^1 \sin(2\theta), \\
\sigma_{\theta 1}^{(I)p} &= b_1^1 \cos(2\theta) + b_2^1 \sin(2\theta), \\
\tau_{\rho \theta 1}^{(I)p} &= c_1^1 \cos(2\theta) + c_2^1 \sin(2\theta),
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1^1 &= -R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) \right) - 1 \right) \cos(\zeta_1), \\
a_2^1 &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) \right) - 1 \right) \sin(\zeta_1), \\
b_1^1 &= -R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) \right) + 1 \right) \cos(\zeta_1), \\
b_2^1 &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) \right) + 1 \right) \sin(\zeta_1), \\
c_1^1 &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) \right) - 1 \right) \sin(\zeta_1), \\
c_2^1 &= R'_1 \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) \right) + 1 \right) \cos(\zeta_1).
\end{aligned}$$

Условия сопряжения компонент напряжений на границе слоев трубы имеют вид:

$$\sigma_{\rho 1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \sigma_{\rho 2}^{(I)p}, \quad \tau_{\rho \theta 1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_2} = \tau_{\rho \theta 2}^{(I)p} \quad (2.1.23)$$

Из (2.1.21), (2.1.23) получаем предельное состояние во 2 пластической области:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(I)p} &= a_1^2 \cos(2\theta) + a_2^2 \sin(2\theta), \\ \sigma_{\theta 2}^{(I)p} &= b_1^2 \cos(2\theta) + b_2^2 \sin(2\theta), \\ \tau_{\rho \theta 2}^{(I)p} &= c_1^2 \cos(2\theta) + c_2^2 \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [b_1^1 + R_2' \cos(\zeta_2)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \right. \\ &+ [a_1^1 - R_2' \cos(\zeta_2)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \right] + \\ &\quad \left. + R_2' \cos(\zeta_2) \right\}, \\ a_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [b_2^1 + R_2' \sin(\zeta_2)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \right. \\ &+ [a_2^1 + R_2' \cos(\zeta_2)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \right] - \\ &\quad \left. - R_2' \sin(\zeta_2) \right\}, \\ b_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [c_1^1 + R_2' \cos(\zeta_2)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \right. \\ &+ [c_1^1 - R_2' \cos(\zeta_2)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \right] - \\ &\quad \left. - R_2' \cos(\zeta_2) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [c_2^1 + R_2' \sin(\zeta_2)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \right. \\
&+ [c_2^1 + R_2' \sin(\zeta_2)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \right] + \\
&\quad \left. + R_2' \sin(\zeta_2) \right\}, \\
c_1^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [a_2^1 + R_2' \sin(\zeta_2)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \right. \\
&+ [b_2^1 + R_2' \sin(\zeta_2)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \right] - \\
&\quad \left. - R_2' \sin(\zeta_2) \right\}, \\
c_2^2 &= \frac{\alpha_2}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [a_2^1 - R_2' \cos(\zeta_2)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) + \right. \\
&+ [b_2^1 + R_2' \cos(\zeta_2)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_2} \right) \right) \right] - \\
&\quad \left. - R_2' \cos(\zeta_2) \right\}.
\end{aligned}$$

Аналогично из условия сопряжения компонент напряжений на границе n – го слоя трубы:

$$\sigma_{\rho n}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \sigma_{\rho n-1}^{(I)p}, \quad \tau_{\rho \theta n}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \tau_{\rho \theta n}^{(I)p} \quad (2.1.25)$$

можно найти предельное состояние в n – ом слое:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho n}^{(I)p} &= a_1^n \cos(2\theta) + a_2^n \sin(2\theta), \\
\sigma_{\theta n}^{(I)p} &= b_1^n \cos(2\theta) + b_2^n \sin(2\theta), \\
\tau_{\rho \theta n}^{(I)p} &= c_1^n \cos(2\theta) + c_2^n \sin(2\theta),
\end{aligned} \quad (2.1.26)$$

где

$$\begin{aligned}
a_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} \left[b_1^{n-1} + R'_n \cos(\zeta_n) \right] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \right. \\
&+ \left[a_1^{n-1} - R'_n \cos(\zeta_n) \right] \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) \right) \Bigg\} + \\
&\quad + R'_n \cos(\zeta_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[b_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n) \right] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \right. \\
&+ \left[a_2^{n-1} + R'_n \cos(\zeta_n) \right] \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) \right) \Bigg\} - \\
&\quad - R'_n \sin(\zeta_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} \left[c_1^{n-1} + R'_n \cos(\zeta_n) \right] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \right. \\
&+ \left[c_1^{n-1} - R'_n \cos(\zeta_n) \right] \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) \right) \Bigg\} - \\
&\quad - R'_n \cos(\zeta_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[c_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n) \right] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \right. \\
&+ \left[c_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n) \right] \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) \right) \Bigg\} + \\
&\quad + R'_n \sin(\zeta_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} \left[a_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n) \right] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \right. \\
&+ \left[b_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n) \right] \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) \right) \Bigg\} - \\
&\quad - R'_n \sin(\zeta_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2^n = & \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[a_2^{n-1} - R'_n \cos(\zeta_n) \right] \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) + \right. \\
& + \left[b_2^{n-1} + R'_n \cos(\zeta_n) \right] \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \left(\frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right) \right) - \\
& \left. - R'_n \cos(\zeta_n) \right\}.
\end{aligned}$$

В случае, если труба двухслойная, получим решение найденное в [63].

Таким образом, предельное состояние многослойной трубы в первом приближении полностью определяется из соотношений (2.1.26).

§ 2.2 Предельное состояние многослойной неоднородной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления

Рассмотрим многослойную толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p (рисунок 2.1).

Условие предельного состояния для n – го слоя примем в виде [40]:

$$Z_n (\sigma_{xn} - \sigma_{yn})^2 + 4B_n \tau_{xyn}^2 = 4k_n^2, \quad Z_n, B_n - const, \quad n = 1, 2, \dots, t \quad (2.2.1)$$

где σ_{xn} , σ_{yn} , τ_{xyn} – компоненты напряжения в n - ом слое в декартовой системе координат, $k_n = k_n(x, y)$.

Положим

$$k_1 = k^0 + \delta k'_1, \quad k_2 = k^0 + \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3. \\ k_n = k_0 + \delta(c_n x + d_n y), \quad k_0, c_n, d_n - const, \quad (2.2.2)$$

где δ – малый безразмерный параметр.

В пластической области напряженное состояние определяется из условия пластичности (2.2.1) и уравнений равновесия (2.1.2).

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам: все компоненты напряжения отнесем к величине предела текучести k и обозначим

$$\frac{k_n}{k_0} = K_n, \quad \frac{p}{k_0} = q,$$

Положим, что

$$\frac{a_n}{\rho_s^{(0)}} = \alpha_n, \quad \frac{b}{\rho_s^{(0)}} = \beta,$$

где $\rho_s^{(0)}$ – радиус пластической области в нулевом приближении.

Из (2.2.1), (2.1.4), (2.1.5) получим условие пластичности в полярных координатах:

$$Z_n \left[(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \cos 2\theta - 2\tau_{\rho\theta n} \sin(2\theta) \right]^2 + B_n \left[(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \sin(2\theta) + 2\tau_{\rho\theta n} \cos(2\theta) \right]^2 = 4K_n^2 \quad (2.2.3)$$

или

$$\begin{aligned} & (\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n})^2 \left[Z_n \cos^2 2\theta + B_n \sin^2(2\theta) \right] + 4\tau_{\rho\theta}^2 \left[Z_n \sin^2(2\theta) + B_n \cos^2(2\theta) \right] - \\ & - 2(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \tau_{\rho\theta n} (Z_n - B_n) \sin(4\theta) = 4 \left(1 + \delta\rho (c_n \cos(\theta) + d_n \sin(\theta)) \right)^2. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Положим, что компоненты напряжения во всех n слоях зависят от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде:

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^{(0)} + \delta\sigma_{ijn}^{(I)}, \quad Z_n = 1 + \delta z_n, \quad B_n = 1 + \delta b_n. \quad (2.2.5)$$

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы (2.1.9). Компоненты напряжений в n -ом слое в нулевом приближении определяются из соотношения (2.1.16).

Из (2.2.4), согласно (2.1.8), (2.1.9) в первом приближении имеем:

$$\sigma_{\theta n}^{(I)} - \sigma_{\rho n}^{(I)} = 2\rho \left[c_n \cos(\theta) + d_n \sin(\theta) \right] + \left[\frac{z_n + b_n}{2} + \frac{z_n - b_n}{2} \cos(4\theta) \right]. \quad (2.2.6)$$

Из (2.2.6) согласно (2.1.18) получим:

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2} = \\ & = 2\rho^3 (c_n \cos(\theta) + d_n \sin(\theta)) + \rho^2 (G_n + H_n \cos(4\theta)), \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

где

$$G_n = \left(\frac{z_n + b_n}{2} \right), \quad H_n = \left(\frac{z_n - b_n}{2} \right). \quad (2.2.8)$$

Решение уравнения (2.2.7) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi_n^{(I)} = \Phi_{n \text{ odn}}^{(I)} + \Phi_{n \text{ neodn}}^{(I)}. \quad (2.2.9)$$

Однородное уравнение (2.2.7) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(I)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(I)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.2.10)$$

Положим:

$$\Phi_n^{(I)} \text{ odn} = R_1 \cos(m\theta) + R_2 \sin(m\theta) = R \cos(m\theta + \theta_0), \quad (2.2.11)$$

где

$$R_i = R_i(\rho), \quad \cos(\theta_0) = \frac{R_1}{R}, \quad \sin(\theta_0) = \frac{R_2}{R}, \quad R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Согласно[44], имеем при $m = 0$:

$$R = C_{00} + C_{01}, \quad \text{где } C_{00}, \quad C_{01} - const, \quad (2.2.12)$$

при $m = 1$:

$$R = \rho(C_{11} + C_{12} \ln(\rho)), \quad \text{где } C_{11}, \quad C_{12} - const, \quad (2.2.13)$$

при $m \geq 2$:

$$R = \rho \left[C_{m1} \cos\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) + C_{m2} \sin\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) \right], \quad (2.2.14)$$

где $C_{m1}, \quad C_{m2} - const$.

Согласно (2.2.7) при $m = 0, 1, 4$.

$$R_n = \left(C_{00}^{(n)} + C_{01}^{(n)} \right) + \rho \left(C_{11}^{(n)} + C_{12}^{(n)} \ln(\rho) \right) + \rho \left[C_{m1}^{(n)} \cos\left(\sqrt{3} \ln(\rho)\right) + C_{m2}^{(n)} \sin\left(\sqrt{3} \ln(\rho)\right) \right]. \quad (2.2.15)$$

Частное решение неоднородного уравнения (2.2.7) имеет вид

$$\Phi_n^{(I)} \text{ chastn} = \frac{G_n}{2} \left(\rho^2 \ln \rho - \frac{\rho^2}{2} \right) + \frac{H_n}{16} \rho^2 \cos(4\theta) + \frac{\rho^3}{2} (c_n \cos(\theta) + d_n \sin(\theta)). \quad (2.2.16)$$

Из (2.1.18), (2.2.9), (2.2.15), (2.2.16) имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho n}^{(I)} = & C_{00}^{(n)} + \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\
& \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1}^n \left[(1 - m^2) \cos\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) - \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \sin\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) \right] + \right. \\
& + C_{m2}^{(n)} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) + (1 - m^2) \sin\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) \right] \left. \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\
& + \rho \left(c_n \cos(\theta) + d_n \sin(\theta) \right) + G_n \ln(\rho) - \frac{7}{8} H_n \cos(4\theta),
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta n}^{(I)} = & C_{00}^{(n)} + \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\
& \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1}^n \left[(1 - m^2) \cos\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) - \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \sin\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) \right] + \right. \\
& + C_{m2}^{(n)} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) + (1 - m^2) \sin\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) \right] \left. \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\
& + 3\rho \left(c_n \cos(\theta) + d_n \sin(\theta) \right) + G_n (1 + \ln(\rho)) + \frac{1}{8} H_n \cos(4\theta),
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho \theta n}^{(I)} = & \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) - \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left(m \sqrt{m^2 - 1} \right) \times \\
& \times \left[-C_{m1}^{(n)} \sin\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) + C_{m2}^{(n)} \cos\left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho)\right) \right] \sin(m\theta + \theta_0) + \\
& + \rho \left(c_n \cos(\theta) - d_n \sin(\theta) \right) + \frac{H_n}{4} \sin(4\theta),
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

где $C_{00}^{(n)}$, $C_{m1}^{(n)}$, $C_{m2}^{(n)} - const$ при $m \geq 1$.

Из (2.2.17), (2.2.19), (2.1.20) имеем

$$\begin{aligned}
C_{00}^{(1)} + \frac{1}{\alpha_1} \left\{ C_{41}^{(1)} \left[-15 \cos(\omega_1) - \sqrt{15} \sin(\omega_1) \right] + C_{42}^{(1)} \left[\sqrt{15} \cos(\omega_1) - 15 \sin(\omega_1) \right] \right\} \cos(4\theta) + \\
+ \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos(\theta) + \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin(\theta) = \\
= -\alpha_1 (c_1 \cos(\theta) + d_1 \sin(\theta)) - G_1 \ln(\alpha_1) + \frac{7}{8} H_1 \cos(4\theta),
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin(\theta) - \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos(\theta) + \frac{4\sqrt{15}}{\alpha_1} \left[-C_{41}^{(1)} \sin(\omega_1) + C_{42}^{(1)} \cos(\omega_1) \right] \sin(4\theta) = \\
= \alpha_1 (d_1 \cos(\theta) - c_1 \sin(\theta)) - \frac{1}{4} H_1 \sin(4\theta),
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

где $\omega_1 = \sqrt{15} \ln(\alpha_1)$, в последующем $\omega_n = \sqrt{15} \ln(\alpha_n)$.

Из (2.2.8), (2.2.17) получим:

$$C_{00}^{(1)} = -G_1 \ln(\alpha_1) = -\frac{z_1 + b_1}{2} \ln(\alpha_1). \tag{2.2.22}$$

Постоянные $C_{41}^{(1)}$, $C_{42}^{(1)}$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} C_{41}^{(1)} \cdot M(\alpha_1) + C_{42}^{(1)} \cdot N(\alpha_1) = \frac{7\alpha_1}{8} H_1, \\ C_{41}^{(1)} (-\sin(\omega_1)) + C_{42}^{(1)} \cos(\omega_1) = \frac{-\sqrt{15}\alpha_1}{240} H_1, \end{cases} \tag{2.2.23}$$

где

$$\begin{aligned}
M(\alpha_n) &= -15 \cos(\omega_n) - \sqrt{15} \sin(\omega_n), \\
N(\alpha_n) &= \sqrt{15} \cos(\omega_n) + 15 \sin(\omega_n).
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Имеет место

$$C_{41}^{(1)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1}, \quad C_{42}^{(1)} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_1}, \tag{2.2.25}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -15 \cos(\omega_1) - \sqrt{15} \sin(\omega_1) & \sqrt{15} \cos(\omega_1) - 15 \sin(\omega_1) \\ -\sin(\omega_1) & \cos(\omega_1) \end{vmatrix} = -15, \quad (2.2.26)$$

Аналогично (2.2.26) справедливо $\Delta_n = -15$.

$$\Delta_{11} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 \left(15 \cos(\omega_1) - \sqrt{15} \sin(\omega_1) \right), \quad \Delta_{21} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 \left(15 \sin(\omega_1) + \sqrt{15} \cos(\omega_1) \right). \quad (2.2.27)$$

Тогда

$$\begin{cases} C_{41}^{(1)} = -\frac{\alpha_1}{240} H_1 \left(15 \cos(\omega_1) - \sqrt{15} \sin(\omega_1) \right), \\ C_{42}^{(1)} = -\frac{\alpha_1}{240} H_1 \left(15 \sin(\omega_1) + \sqrt{15} \cos(\omega_1) \right). \end{cases} \quad (2.2.28)$$

Далее определим $C_{11}^{(1)}$, $\bar{C}_{11}^{(1)}$. Для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos(\theta) = -c_1 \alpha_1 \cos(\theta), \\ \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin(\theta) = -d_1 \alpha_1 \sin(\theta). \end{cases} \quad (2.2.29)$$

Из (2.2.29) получим:

$$\begin{cases} C_{11}^{(1)} = -c_1 \alpha_1^2, \\ \bar{C}_{11}^{(1)} = -d_1 \alpha_1^2. \end{cases} \quad (2.2.30)$$

Аналогично можно найти напряженное состояния во втором и последующих слоях.

Согласно (2.2.17), (2.2.19), (2.1.23) получим:

$$\begin{aligned}
C_{00}^{(2)} + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ C_{41}^{(2)} \left[-15 \cos(\omega_2) - \sqrt{15} \sin(\omega_2) \right] + C_{42}^{(2)} \left[\sqrt{15} \cos(\omega_2) - 15 \sin(\omega_2) \right] \right\} \cos(4\theta) + \\
+ \frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos(\theta) + \frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin(\theta) = \\
= \sigma_{\rho 1}^{(I)}(\alpha_2) - \alpha_2 \left(c_2 \cos(\theta) + d_2 \sin(\theta) \right) - G_2 \ln(\alpha_2) + \frac{7}{8} H_2 \cos(4\theta),
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin(\theta) - \frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos(\theta) + \frac{4\sqrt{15}}{\alpha_2} \left[-C_{41}^{(2)} \sin(\omega_1) + C_{42}^{(2)} \cos(\omega_1) \right] \sin(4\theta) = \\
= \tau_{\rho \theta}^{(I)}(\alpha_2) + \alpha_2 \left(d_2 \cos(\theta) - c_2 \sin(\theta) \right) - \frac{1}{4} H_2 \sin(4\theta).
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Из (2.2.17), (2.2.31) получаем

$$C_{00}^{(2)} = -G_2 \ln(\alpha_2) - G_1 \ln(\alpha_1). \tag{2.2.33}$$

Из (2.1.15), (2.2.32), (2.2.17) - (2.2.30) следует:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\alpha_2} \left[C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2) \right] &= \Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1), \\ \frac{4\sqrt{15}}{\alpha_2} \left[-C_{41}^{(2)} \sin(\omega_2) + C_{42}^{(2)} \cos(\omega_2) \right] &= \Sigma_{\rho \theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1). \end{aligned} \right. \tag{2.2.34}$$

где

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\rho 1}(\rho) &= \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(1)} \left[-15 \cos(\omega) - \sqrt{15} \sin(\omega) \right] + C_{42}^{(1)} \left[\sqrt{15} \cos(\omega) - 15 \sin(\omega) \right] \right), \\
\Sigma_{\rho \theta 1}(\rho) &= \frac{4\sqrt{15}}{\rho} \left[-C_{41}^{(1)} \sin(\omega) + C_{42}^{(1)} \cos(\omega) \right], \quad \omega = \sqrt{15} \ln \rho.
\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Систему уравнений (2.2.35) представим в виде:

$$\begin{cases} C_{41}^{(2)}M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)}N(\alpha_2) = P_2, \\ C_{41}^{(2)}(-\sin(\omega_2)) + C_{42}^{(2)}\cos(\omega_2) = Q_2, \end{cases} \quad (2.2.36)$$

где

$$\begin{aligned} P_2 &= \alpha_2 \left[\Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8}(H_2 + H_1) \right], \\ Q_2 &= \frac{\alpha_2 \sqrt{15}}{60} \left[\Sigma_{\rho \theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4}(H_2 + H_1) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

Из (2.2.25), (2.2.37) вытекает:

$$\begin{cases} C_{41}^{(2)} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_2} = -\frac{1}{15}(P_2 \cos(\omega) - Q_2 \cdot N(\alpha_2)), \\ C_{41}^{(2)} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = -\frac{1}{15}(P_2 \sin(\omega) + Q_2 \cdot M(\alpha_2)), \end{cases} \quad (2.2.38)$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 = -15.$$

Справедливо:

$$\begin{cases} \frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos(\theta) = \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos(\theta) - c_2 \alpha_2 \cos(\theta), \\ \frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin(\theta) = \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin(\theta) - d_2 \alpha_2 \sin(\theta). \end{cases} \quad (2.2.39)$$

Из (2.2.39) получаем:

$$\begin{cases} C_{11}^{(2)} = -c_1 \alpha_1 \alpha_2 - c_2 \alpha_2^2 = -\alpha_2 (c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2) \\ \bar{C}_{11}^{(2)} = -d_1 \alpha_1 \alpha_2 - d_2 \alpha_2^2 = -\alpha_2 (d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2) \end{cases} \quad (2.2.40)$$

Из (2.2.8), (2.2.17) – (2.2.19), (2.2.31) – (2.2.40) компоненты напряженного состояния $\sigma_{\rho 2}^{(I)}$, $\sigma_{\theta 2}^{(I)}$, $\tau_{\rho \theta 2}^{(I)}$ определены.

Аналогично можно найти компоненты $\sigma_{\rho n}^{(I)}$, $\sigma_{\theta n}^{(I)}$, $\tau_{\rho\theta n}^{(I)}$ при условии, что компоненты $\sigma_{\rho n-1}^{(I)}$, $\sigma_{\theta n-1}^{(I)}$, $\tau_{\rho\theta n-1}^{(I)}$ определены.

По аналогии с (2.2.33) имеем:

$$\begin{aligned} C_{00}^{(n)} = & -G_n \ln(\alpha_n) - G_{n-1} \ln(\alpha_{n-1}) - \\ & -G_{n-2} \ln(\alpha_{n-2}) - \dots - G_1 \ln(\alpha_1) = -\sum_{i=1}^n G_i \ln(\alpha_i). \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

Условие сопряжения решений на границе n -го слоя трубы

$$\sigma_{\rho n}^{(I)} = \sigma_{\rho n-1}^{(I)}, \quad \tau_{\rho n}^{(I)} = \tau_{\rho n-1}^{(I)} \quad \text{при } \rho = \alpha_n, \quad (2.2.42)$$

Из (2.2.17), (2.2.19), аналогично (2.2.38), будем иметь

$$\begin{cases} C_{41}^{(n)} M(\alpha_n) + C_{42}^{(n)} N(\alpha_n) = P_{n-1}, \\ C_{41}^{(n)} (-\sin(\omega_n)) + C_{42}^{(n)} \cos(\omega_n) = Q_{n-1}, \end{cases} \quad (2.2.43)$$

где

$$\begin{aligned} P_n = & \alpha_n \left[\Sigma_{\rho n}(\alpha_n) + \frac{7}{8} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right], \\ Q_n = & \frac{\alpha_n \sqrt{15}}{60} \left[\Sigma_{\rho\theta n}(\alpha_n) - \frac{1}{4} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right], \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\rho n}(\rho) = & \frac{1}{\rho} \left[C_{41}^{(n)} [-15 \cos(\omega_n) - \sqrt{15} \sin(\omega_n)] + C_{42}^{(n)} [\sqrt{15} \cos(\omega_n) - 15 \sin(\omega_n)] \right], \\ \Sigma_{\rho\theta n}(\rho) = & \frac{4\sqrt{15}}{\rho} \left[-C_{41}^{(n)} \sin(\omega_n) + C_{42}^{(n)} \cos(\omega_n) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

Аналогично (2.2.38) имеем:

$$\begin{cases} C_{41}^{(n)} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{15} \left(P_{n-1} \cos(\omega_{n-1}) - Q_{n-1} N(\alpha_n) \right), \\ C_{42}^{(n)} = \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{15} \left(P_{n-1} \sin(\omega_{n-1}) - Q_{n-1} M(\alpha_n) \right), \end{cases} \quad (2.2.46)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = -15,$$

где P_n , Q_n определены при известных значениях $\sigma_{ijn-1}^{(I)}$.

Аналогично (2.2.40):

$$\begin{cases} C_{11}^{(n)} = -\alpha_n \left(\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \right) \\ \bar{C}_{11}^{(n)} = -\alpha_n \left(\sum_{i=1}^n d_i \alpha_i \right) \end{cases} \quad (2.2.47)$$

При $k_n = const$ получим решение, найденное в [40].

Компоненты напряжений $\sigma_{\rho n}^{(I)}$, $\sigma_{\theta n}^{(I)}$, $\tau_{\rho\theta n}^{(I)}$ определяются согласно (2.2.17) - (2.2.47).

Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ И ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ЗАЩЕМЛЕННОГО ПО ДВУМ СТОРОНАМ

Построено точное решение известной краевой задачи теории упругости для полуполосы, у которой длинные стороны защемлены, т.е. перемещения здесь равны нулю, а на торце заданы напряжения. Решение представляется в виде разложений по функциям Фадля-Папковича. Однако коэффициенты разложений находятся не приближенно, из решения бесконечной не распадающейся системы алгебраических уравнений, а точно, при помощи систем функций, биортогональных к функциям Фадля-Папковича. Поэтому решение получается точным.

§ 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу теории упругости в полуполосе $\{\Pi : x \geq 0, |y| \leq 1\}$.

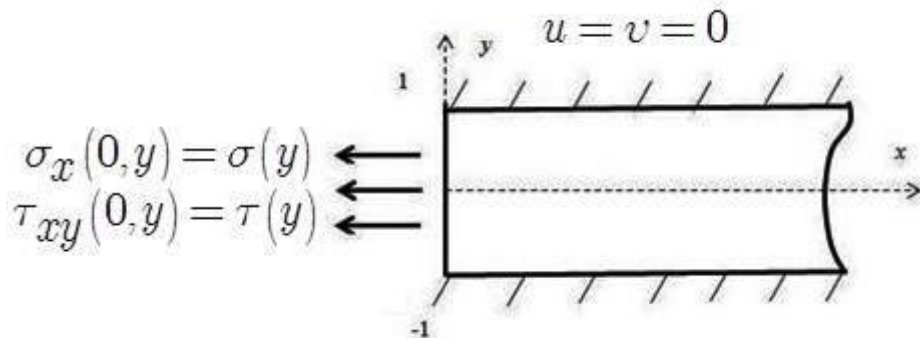


Рисунок 3.1

Будем считать, что на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ продольные $u(x, y)$ и поперечные $v(x, y)$ перемещения равны нулю, т.е.

$$u(x, \pm 1) = v(x, \pm 1) = 0, \quad (3.1.1)$$

а на торце $x = 0$ заданы нормальное и касательное напряжения (рисунок 3.1)

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y) \quad (3.1.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1.1) с помощью зависимостей метода начальных функций (наиболее простой способ построения решения в общем виде, поскольку главная часть работы, связанной с построением функций Фадля-Папковича, оказывается выполненной и представленной в форме операторов метода начальных функций):

$$\begin{aligned} U(x, y) &= L_{UU}(y)U_0(x) + L_{UV}(y)V_0(x) + L_{UY}(y)Y_0(x) + L_{UX}(y)X_0(x), \\ V(x, y) &= L_{VU}(y)U_0(x) + L_{VV}(y)V_0(x) + L_{VY}(y)Y_0(x) + L_{VX}(y)X_0(x), \\ Y(x, y) &= L_{YU}(y)U_0(x) + L_{YV}(y)V_0(x) + L_{YY}(y)Y_0(x) + L_{YX}(y)X_0(x), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$X(x, y) = L_{XU}(y)U_0(x) + L_{XV}(y)V_0(x) + L_{XY}(y)Y_0(x) + L_{XX}(y)X_0(x),$$

$$\sigma_x(x, y) = A_U(y)U_0(x) + A_V(y)V_0(x) + A_Y(y)Y_0(x) + A_X(y)X_0(x).$$

получим характеристическое уравнение,

$$L(\lambda) = \frac{(3 - \nu) \sin 2\lambda}{8\lambda} - \frac{1 + \nu}{4} = 0. \quad (3.1.4)$$

Через $L_{UU}(y), \dots$ обозначены операторы метода начальных функций, а $U_0(x), \dots$ - начальные функции [58].

Уравнение (3.1.4) имеет один вещественный корень λ_1 и бесконечное множество четверок комплексно – сопряженных корней $\pm \lambda_k, \pm \overline{\lambda_k} \in \Lambda, k = 2, 3, \dots$

Можно получить следующую асимптотическую формулу для корней уравнения (3.1.4):

$$z \approx \pi k + \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \ln \left[4\pi k \frac{(1+\nu)}{3-\nu} + \frac{1}{4k} \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1.5)$$

Решение краевой задачи представляется рядами по функциям Фадля-Папковича с неизвестными коэффициентами a_k , которые должны быть определены из условий на торцах полуполосы:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \xi(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \chi(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_y(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Функции Фадля-Папковича имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_k, y) &= -\frac{1}{4}(1+\nu)(\sin \lambda_k \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y), \\ \chi(\lambda_k, y) &= \left[\frac{\nu+1}{4} \sin \lambda_k + \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \cos \lambda_k \right] \sin \lambda_k y + \frac{\nu+1}{4} y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y, \\ s_x(\lambda_k, y) &= \left[-\nu \cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ s_y(\lambda_k, y) &= \left[\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k - \cos \lambda_k \right] \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= \left[\frac{\nu-1}{2} \cos \lambda_k + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Будем считать, что в условиях на торце полуполосы (3.1.2) функции $\sigma(y)$ четна, а $\tau(y)$ нечетна (симметричная деформация полуполосы) и удовлетворим

им с помощью выражений (3.1.6) полагая, что касательные напряжения равны нулю:

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} \overline{s_x}(\overline{\lambda_k}, y), \\ 0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} \overline{t_{xy}}(\overline{\lambda_k}, y). \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Искомые коэффициенты разложений определяются отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций. Общая схема решения краевых задач в полуполосе приведена в [70]. Она такова. Вначале изучаются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля-Папковича. К ней строится биортогональная система функций, с помощью которой находятся коэффициенты разложений. Полученные таким образом разложения одной функции называются разложениями Лагранжа [70]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений в тригонометрические ряды Фурье и играют такую же роль при определении коэффициентов разложений (3.1.8), какую ряды Фурье играют в решениях Файлона и Рибьера в тригонометрических рядах. В краевых разложениях двух функций, в отличие от разложения Лагранжа, одной функции, нужно найти такой набор коэффициентов $\{a_k, \overline{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$, который был бы общим для этих двух разложений. Недостающий необходимый произвол при этом обеспечивается существованием чисто мнимых векторов, входящих в состав разложений по функциям Фадля-Папковича (3.1.8). Так как их проекции на вещественное направление равны нулю, то эти разложения были названы нуль – рядами [70]. В окончательных выражениях для напряжений и перемещений в полуполосе нуль-ряды нужно выделять, приводя тем самым формулы к разложениям Лагранжа. В классических решениях Файлона-Рибьера тригонометрические системы функций двукратно полны, что обеспечивает необходимый произвол в этом случае. Нуль-рядов здесь нет, т.к. базисные функции вещественны. Поэтому ситуация оказывается тривиальной: удовлетворяя заданным на торце полуполосы нормальным напряжениям, получим равенство, содержащее два набора (для каждого номера

$k = 1, 2, \dots$) неизвестных коэффициентов разложений. Два – потому что имеем два набора тригонометрических систем функций. Второе граничное условие (для касательных напряжений) фактически, позволяет установить связь между каждой парой неизвестных коэффициентов.

§ 3.2 Разложения Лагранжа по функциям Фадля-Папковича

Коэффициенты a_k определяются из равенств (3.1.8) в явном виде с помощью биортогональных систем функций. Эти функции должны быть найдены как решения функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda, y) V_k(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy = \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\lambda, y) Y_k(y) dy &= \frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Здесь $\xi(\lambda, y)$, $\chi(\lambda, y)$ и т. д. – порождающие функции. При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (3.2.1) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T \chi(\lambda_m, y) V_k(y) dy &= \int_T s_x(\lambda_m, y) X_k(y) dy = \begin{cases} N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \\ \int_T \xi(\lambda_m, y) U_k(y) dy &= \int_T t_{xy}(\lambda_m, y) T_k(y) dy = \begin{cases} \lambda_k N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\int_T s_y(\lambda_m, y) Y_k(y) dy = \begin{cases} \lambda_k^2 N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \quad N_k = \lambda_k L'(\lambda_k) / 2$$

$L'(\lambda_k)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_k$. Для комплексных значений λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (3.2.1) нужно заменить Т-образным контуром, лежащим в плоскости $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [70]. Из (3.2.1) также вытекают такие равенства, справедливые при всех $\overline{\lambda_m}$:

$$\begin{aligned} \int_T \overline{\xi(\lambda_m, y)} U_k(y) dy &= \int_T \xi(\lambda_m, y) \overline{U_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \overline{\chi(\lambda_m, y)} V_k(y) dy &= \int_T \chi(\lambda_m, y) \overline{V_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \overline{s_x(\lambda_m, y)} X_k(y) dy &= \int_T s_x(\lambda_m, y) \overline{X_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \overline{t_{xy}(\lambda_m, y)} T_k(y) dy &= \int_T t_{xy}(\lambda_m, y) \overline{T_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \overline{s_y(\lambda_m, y)} Y_k(y) dy &= \int_T s_y(\lambda_m, y) \overline{Y_k(y)} dy = 0. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Следуя [70], можно показать, что элементы $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $T_k(y)$ и $Y_k(y)$ биортогональных систем функций можно представить в виде суммы финитных, равных нулю вне отрезка $|y| \leq 1$, и не финитных частей. Причем, не финитные части ортогональны функциям $\{\sin q_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos q_m\}_{m=1}^{\infty}$, $q_m = (2m-1)\pi/2$. При решении краевых задач, как правило, используются финитные части биортогональных функций, поэтому важно знать их явное представление. Покажем, как строятся финитные части на двух примерах. Построим вначале функцию $x_k(y)$ – финитную части биортогональной функции $X_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots$). Полагая в соотношении биортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad (3.2.4)$$

$\lambda = q_m = \frac{2m-1}{2}\pi$ и учитывая, что все $\cos q_m y$ ортогональны не финитным частям функций $X_k(y)$, получим:

$$\int_{-1}^1 s_x(q_m, y) x_k(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} \quad (3.2.5)$$

или

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) x_k(y) dy = -\frac{(-1)^m q_m}{2(q_m^2 - \lambda_k^2)}. \quad (3.2.6)$$

Но

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = -\frac{2(-1)^m q_m \cos \lambda_k}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (3.2.7)$$

Сравнивая (3.2.6) и (3.2.7), заключаем, что:

$$x_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k}. \quad (3.2.8)$$

Теперь построим функцию $t_k(y)$ - финитную часть функции $T_k(y)$. Полагая в равенстве:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy = \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad (3.2.9)$$

$\lambda = q_m$, получим:

$$\int_{-1}^1 t_{xy}(q_m, y) t_k(y) dy = \frac{q_m^3 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} \quad (3.2.10)$$

или

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) t_k(y) dy = \frac{(-1)^m}{2} \left(1 + \frac{\lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2}\right) \quad (3.2.11)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sin(q_m y) \frac{\lambda_k \sin(\lambda_k y)}{\cos \lambda_k} dy &= \frac{(-1)^m \lambda_k^2}{2(q_m^2 - \lambda_k^2)}, \\ -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sin(q_m y) [\delta(y-1) - \delta(y+1)] dy &= \frac{(-1)^m}{2} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

и сравнивая (3.2.12) с (3.2.11), находим:

$$t_k(y) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_k \sin \lambda_k y}{\cos \lambda_k} + [\delta(y-1) - \delta(y+1)] \right), \quad (3.2.13)$$

где δ - дельта функция. Заметим, что $t_k(y) = x'_k(y)$.

Разлагая функции, стоящие в левой и правой части первого равенства (3.2.1) в ряды по степеням λ и полагая, что $\lambda_k = 0$, $\lambda \rightarrow 0$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\nu) X_k(y) dy = 0, \quad (3.2.14)$$

т.е. все функции $X_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots$) ортогональны к $(-\nu)$ - константе. В силу этого, ряды по системе функций $\{s_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ в общем случае будут отличаться от раскладываемой функции на некоторую постоянную, за исключением случая, когда функция $\sigma(y)$ самоуравновешена. Считая, что $\lambda \rightarrow 0$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\nu) X_0(y) dy = \frac{1-\nu}{2}. \quad (3.2.15)$$

Финитную часть функции $X_0(y)$ найдем, воспользовавшись, по прежнему, первым уравнением (3.2.1), в котором примем $\lambda_k = 0$, $\lambda = q_m$. Тогда вместо получим такое уравнение:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+\nu)}{2} q_m (-1)^m \cos(q_m y) x_0(y) dy = -\frac{(1+\nu)}{4}. \quad (3.2.16)$$

Откуда видно, что

$$x_0(y) = \frac{1}{4}. \quad (3.2.17)$$

Далее, по аналогии, построим функцию $u_k(y)$ - финитную часть биортонормальной системы функций $U_k(y)$. Полагая в равенстве:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy = \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (3.2.18)$$

$\lambda = q_m$, имеем:

$$\int_{-1}^1 \xi(q_m, y) u_k(y) dy = \frac{q_m^3 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (3.2.19)$$

Учитывая

$$\xi(q_m, y) = -\frac{1+\nu}{4} \sin q_n \cos(q_m y) = \frac{1+\nu}{4} (-1)^m \cos(q_m y) \quad (3.2.20)$$

и подставив (3.2.20) в (3.2.18), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy &= \frac{1+\nu}{4} (-1)^m \int_{-1}^1 \cos(q_m y) U_k(y) dy = \\ &= \frac{q_m^3 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} = \frac{-\frac{1+\nu}{4} q_m^3}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 U_k(y) \cos(q_m y) dy = -(-1)^m \frac{q_m^3}{q_m^2 - \lambda_k^2} = -(-1)^m \left[q_m + \frac{q_m \lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} \right]. \quad (3.2.22)$$

Отсюда

$$U_k(y) = \frac{1}{2} [\delta(y-1) - \delta(y+1)] + \frac{\lambda_k^2 \cos(\lambda_k y)}{2 \cos \lambda_k}. \quad (3.2.23)$$

Построим функцию $v_k(y)$ - финитную часть функции $V_k(y)$. Полагая в равенстве:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda, y) v_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (3.2.24)$$

$\lambda = q_m$, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(q_m, y) v_k(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (3.2.25)$$

А учитывая, что:

$$\chi(q_m, y) = (-1)^m \frac{1+\nu}{4} \sin(q_m y) \quad (3.2.26)$$

и подставляя (3.2.26) в (3.2.25), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(q_m, y) v_k(y) dy = \frac{1+\nu}{4} (-1)^m \int_{-1}^1 \sin(q_m y) v_k(y) dy. \quad (3.2.27)$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) v_k(y) dy = (-1)^m \frac{q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} = (-1)^m \left(1 + \frac{\lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} \right).$$

Отсюда имеем:

$$v_k(y) = \frac{1}{2} [\delta(y-1) - \delta(y+1)] - \frac{\lambda_k \sin(\lambda_k y)}{2 \cos \lambda_k}. \quad (3.2.28)$$

Построим разложения Лагранжа одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича. Например,

$$f(y) = A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y). \quad (3.2.29)$$

В начале определим коэффициент A . Для этого умножим обе части (3.2.29) на функцию $x_0(y)$ и проинтегрируем. Так как функция $X_0(y)$ ортогональна к функциям Фадля-Папковича $s_x(\lambda_k, y)$, то

$$\int_{-1}^1 f(y)x_0(y)dy = A \int_{-\infty}^{\infty} X_0(y)dy. \quad (3.2.30)$$

Учитывая (3.2.15) и (3.2.17), получаем:

$$\int_{-1}^1 f(y)\frac{1}{4}dy = A\left(\frac{\nu-1}{2\nu}\right). \quad (3.2.31)$$

Обозначим:

$$\int_{-1}^1 f(y)dy = f_0. \quad (3.2.32)$$

Тогда имеем:

$$f_0 = A\frac{2(\nu-1)}{\nu}. \quad (3.2.33)$$

Отсюда определим коэффициент A :

$$A = \frac{\nu f_0}{2(\nu-1)}. \quad (3.2.34)$$

Далее умножим обе части (3.2.29) на функцию $x_k(y)$ и проинтегрируем.

$$\int_{-1}^1 f(y)x_k(y)dy = a_k \int_{-1}^1 s_x(\lambda_k, y)x_k(y)dy + \bar{a}_k \int_{-1}^1 s_x(\bar{\lambda}_k, y)x_k(y)dy. \quad (3.2.35)$$

Обозначим левую часть (3.2.35) через f_k . Тогда, в силу (3.2.3), имеем:

$$f_k = \int_{-1}^1 f(y)x_k(y)dy. \quad (3.2.36)$$

Отсюда, используя соотношения ортогональности (3.2.2), получим

$$a_k = f_k / N_k \quad (3.2.37)$$

Таким образом, разложение Лагранжа по системе функций Фадля - Папкови-
ча $s_x(\lambda_k, y)$ имеет вид:

$$f(y) = \frac{2\nu f_0}{\nu - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{N_k} s_x(\lambda_k, y) + \frac{f_k}{\bar{N}_k} s_x(\bar{\lambda}_k, y) \quad (3.2.38)$$

Аналогично можно получить разложения Лагранжа по другим системам
функций $t_{xy}(\lambda_k, y)$, $s_y(\lambda_k, y)$, $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$:

$$\begin{aligned} \tau xy(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{N_k \lambda_k} t_{xy}(\lambda_k, y) + \frac{t_k}{\bar{N}_k \bar{\lambda}_k} t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y), \\ t_k &= \int_{-1}^1 \tau xy(y) t_k(y) dy \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

$$\begin{aligned} \sigma y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sy_k}{N_k \lambda_k^2} s_y(\lambda_k, y) + \frac{sy_k}{\bar{N}_k \bar{\lambda}_k^2} s_y(\bar{\lambda}_k, y), \\ sy_k &= \int_{-1}^1 \sigma y(y) y_k(y) dy \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

$$\begin{aligned} V(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{N_k} \chi(\lambda_k, y) + \frac{v_k}{\bar{N}_k} \chi(\bar{\lambda}_k, y), \\ v_k &= \int_{-1}^1 V(y) v_k(y) dy \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

$$\begin{aligned} U(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{N_k \lambda_k} \xi(\lambda_k, y) + \frac{u_k}{\bar{N}_k \bar{\lambda}_k} \xi(\bar{\lambda}_k, y), \\ u_k &= \int_{-1}^1 U(y) u_k(y) dy \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Рассмотрим пример. Разложим функцию $y^2 - 1$ в ряд Лагранжа (3.2.38). По-
лагая $\nu = 1/3$, будем иметь:

$$\begin{aligned} f_k &= \int_{-1}^1 f(y) x_k(y) dy = \int_{-1}^1 (y^2 - 1) \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k} dy = \frac{\tan \lambda_k - \lambda_k}{\lambda_k^3}, \\ \frac{2\nu f_0}{\nu - 1} &= \frac{2\nu}{\nu - 1} \int_{-1}^1 (y^2 - 1) dy = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(3.2.43)

Возвращаясь к формуле (3.2.38), получим такой ряд:

$$y^2 - 1 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{s_x(\lambda_k, y)}{N_k} f_k \right) \quad (3.2.44)$$

Ниже на рисунке 3.2 показана раскладываемая функция и ее ряд (3.2.44)

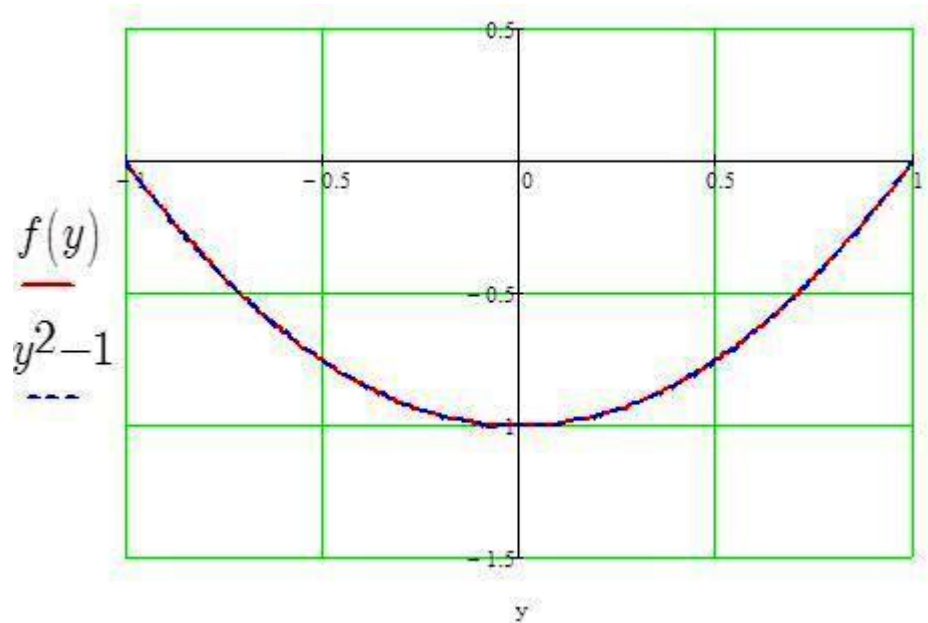


Рисунок 3.2

§ 3.3 Решение краевой задачи

Схема определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 1, 2, \dots$) из разложений (3.1.8) следующая [70]. Продолжим равенства (3.1.8) на всю вещественную ось следующим образом: функции, стоящие справа – аналитически, а функции стоящие слева – периодически с периодом, равным 2. После этого спроектируем их на вещественные подпространства: первое на $X_m(y) + \overline{X_m(y)}$, второе - на $T_m(y) + \overline{T_m(y)}$ и рассмотрим интегралы:

$$\int_T s_x(\lambda_k, t) \left[X_m(t) + \overline{X_m(t)} \right] dt, \quad \int_T t_{xy}(\lambda_k, t) \left[T_m(t) + \overline{T_m(t)} \right] dt, \quad (3.3.1)$$

$$\int_T s_x(\bar{\lambda}_k, t) \left[X_m(t) + \overline{X_m(t)} \right] dt, \quad \int_T t_{xy}(\bar{\lambda}_k, t) \left[T_m(t) + \overline{T_m(t)} \right] dt, \quad (3.3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y) \left[X_m(y) + \overline{X_m(y)} \right] dy, \quad (3.3.3)$$

где T – контур интегрирования. В последнем интеграле $\sigma(y)$ периодическая функция, которую можно представить тригонометрическим рядом по системе функций $\cos q_m y$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Но эти функции, как было сказано выше, ортогональны к не финитным частям функций $X_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots$). Потому вместо (4.3.3) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_k^* &= \int_{-1}^1 \sigma(t) \left[x_k(t) + \overline{x_k(t)} \right] dt = \sigma_k + \overline{\sigma_k}, \\ \tau_k^* &= \int_{-1}^1 \tau(t) \left[t_k(t) + \overline{t_k(t)} \right] dt = \tau_k + \overline{\tau_k}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Учитывая соотношения биортогональности (3.2.1), получим следующую систему из двух алгебраических уравнений ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} \sigma_k^* = a_k N_k + \overline{a_k N_k}, \\ 0 = a_k N_k \lambda_k + \overline{a_k N_k \lambda_k}. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Решая ее, найдем

$$a_k = \frac{-\sigma_k^* \bar{\lambda}_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) N_k}. \quad (3.3.6)$$

Подставляя выражения (3.3.6) в формулы (3.1.6) и избавляясь в них от нуль – рядов (разложений чисто мнимых функций), так, как это сделано в [70], получим искомые выражения для напряжений и перемещений в полуполосе ($c_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $b_k = \operatorname{Im} \lambda_k$) в случае, когда на торце полуполосы заданы только нормальные напряжения $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а касательные равны нулю:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= -\sigma_1 \frac{\xi(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{\lambda_1 N_1} x \lambda_1 \bar{\lambda}_1 - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\
V(x, y) &= \sigma_1 \frac{\chi(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} (1 - c_1 x) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{N_k} \left(\cos(b_k x) - c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) e^{c_k x} \right], \\
\sigma_x(x, y) &= \sigma_1 \frac{s_x(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} (1 - c_1 x) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{N_k} \left(\cos(b_k x) - c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) e^{c_k x} \right], \\
\sigma_y(x, y) &= -\sigma_1 \frac{s_y(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{\lambda_1^2 N_1} (1 - c_1 x) c_1^2 - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} (\lambda_k \bar{\lambda}_k) \left(\cos(b_k x) + c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) e^{c_k x} \right], \\
\tau_{xy}(x, y) &= -\sigma_1 \frac{t_{xy}(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1 \lambda_1} c_1^2 x - \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{N_k \lambda_k} (\lambda_k \bar{\lambda}_k) \frac{\sin(b_k x)}{b_k} e^{c_k x} \right].
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Если на торце полуполосы заданы только касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$, а нормальные равны нулю, то получим:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \tau_1 \frac{\xi(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{\lambda_1 N_1} (1 + c_1 x) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= \tau_1 \frac{\chi(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} x + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right], \\
\sigma_x(x, y) &= \tau_1 \frac{s_x(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} x + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right], \\
\sigma_y(x, y) &= \tau_1 \frac{s_y(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{\lambda_1^2 N_1} (2c_1 + c_1^2 x) + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \left(2c_k \cos b_k x + \frac{c_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) e^{c_k x} \right], \\
\tau_{xy}(x, y) &= \tau_1 \frac{\tau_{xy}(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{\lambda_1 N_1} (1 + c_1 x) + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right].
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Ряды (4.3.7.), (4.3.8) являются, по построению, рядами Лагранжа. Способ выделения нуля – рядов подробно рассмотрен в [69]. Слагаемые, стоящие перед знаками суммирования отвечают отрицательному вещественному корню. Они получаются из соответствующих представлений, стоящих внутри сумм при $b_1 \rightarrow 0$.

Пример №1. Пусть на торце полуполосы нормальные напряжения представлены ступенчатой самоуравновешенной функцией

$$\sigma(y) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & |y| \leq d \\ -\frac{1}{2d}, & 2d \geq |y| > d \\ 0, & 2d < |y| \leq 1 \quad (0 < d < 1) \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Тогда

$$\sigma_k = \frac{2}{2d} \int_0^d \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k} dy - \frac{2}{2d} \int_d^{2d} \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k} dy = \frac{2 \sin d \lambda_k - \sin 2d \lambda_k}{4d \lambda_k \cos \lambda_k} \tag{3.3.10}$$

Подставляя числа (3.3.10) в формулы (3.3.7), получим полное решение краевой задачи. Ниже оно проиллюстрировано графиками распределения напряжений (рисунок 3.3), а также продольных и поперечных перемещений (рисунок 3.4) на торце полуполосы и в сечении $x = 0.02$ (рисунок 3.5, рисунок 3.6). На рисунке 4.7 показано поведение напряжений в заделке. Считалось, что $d = 0.2$.

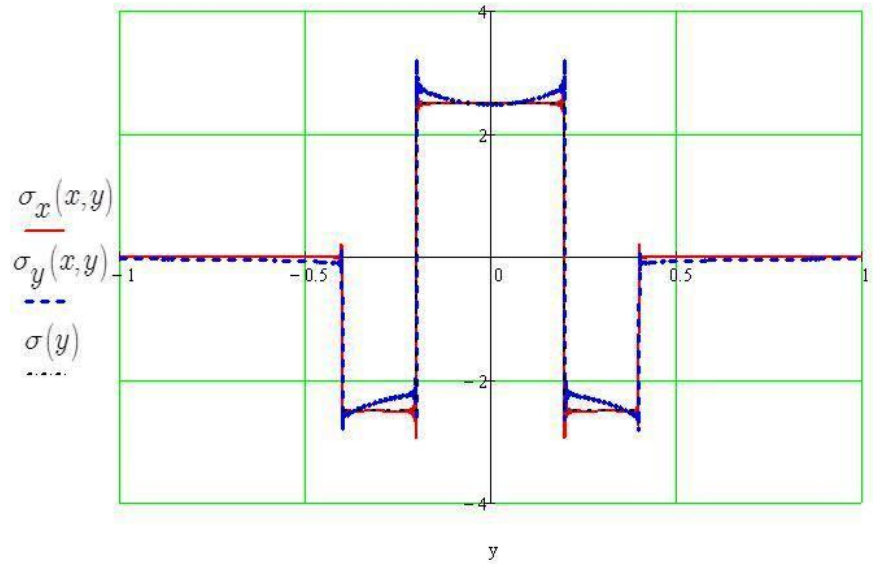


Рисунок 3.3

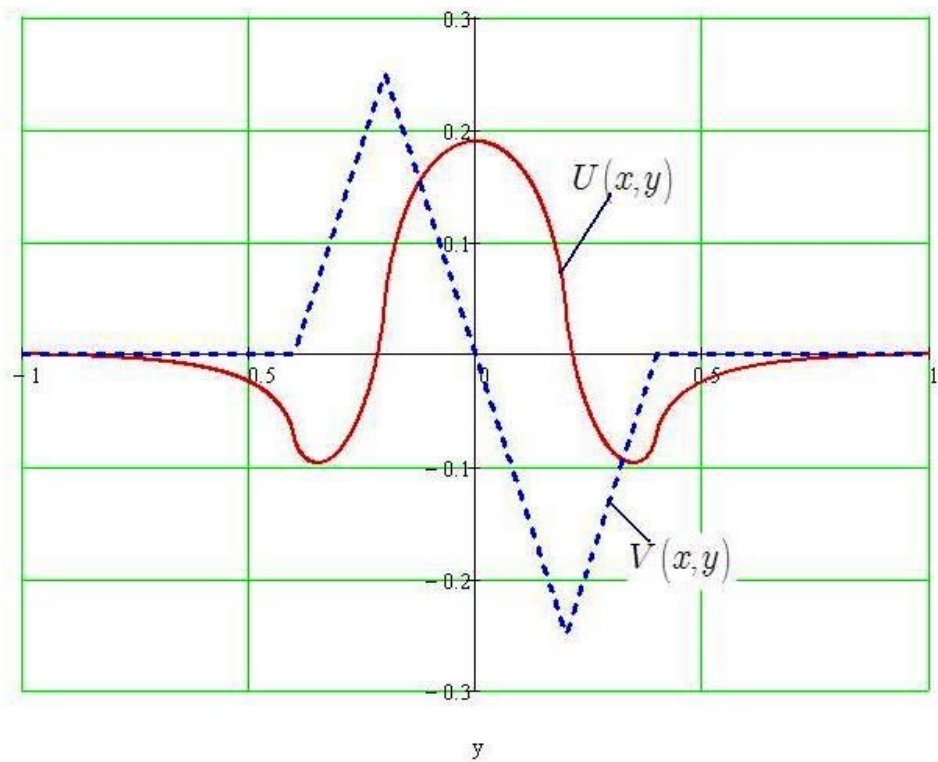


Рисунок 3.4

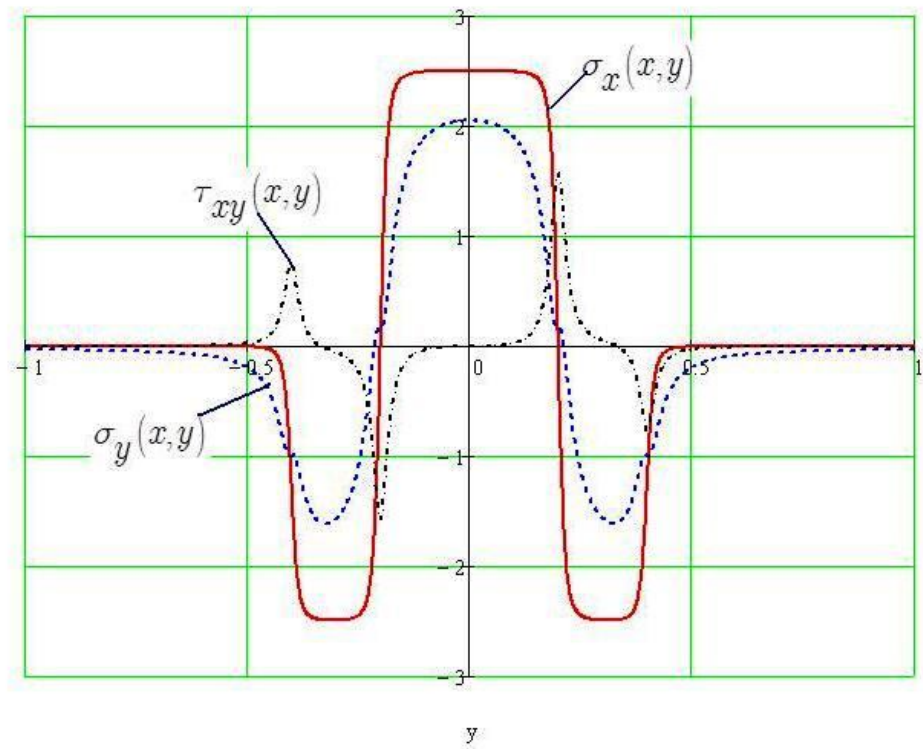


Рисунок 3.5

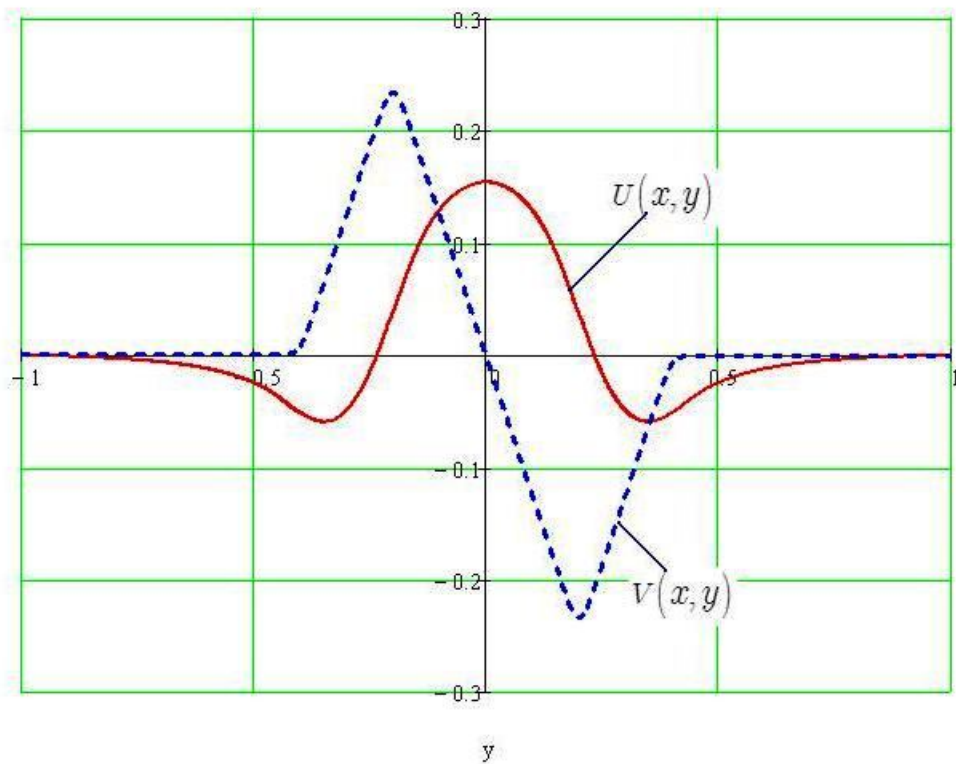


Рисунок 3.6

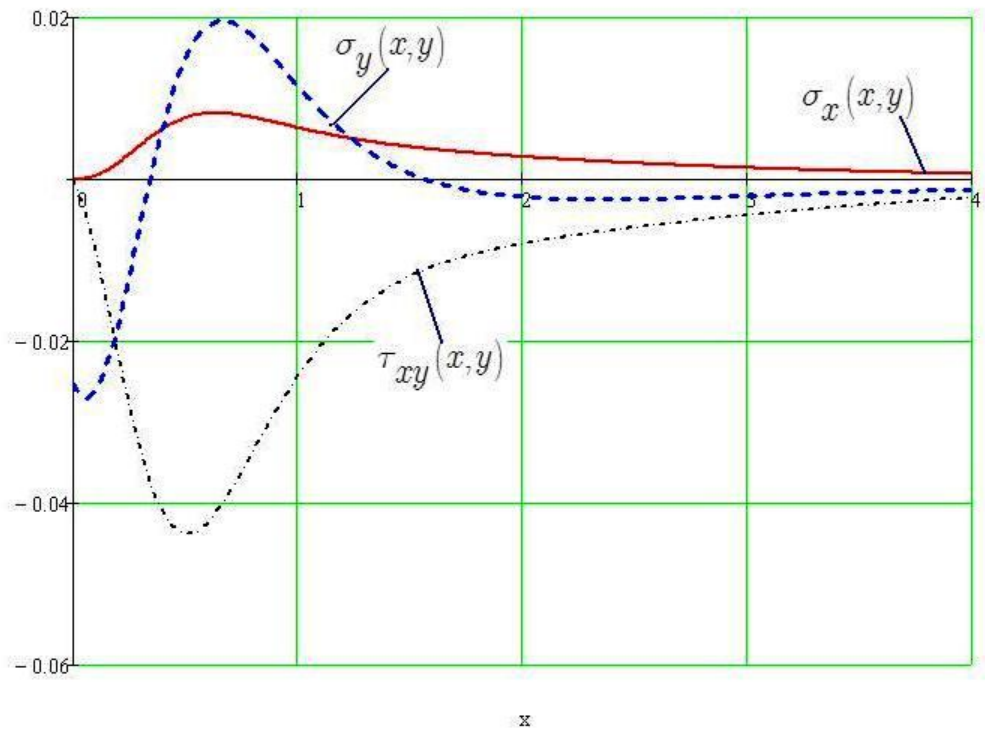


Рисунок 3.7

Пример №2. На торце полуполосы заданы нормальные напряжения $\sigma(y) = y^2 - 4/3$. Тогда $\sigma_k = (\tan \lambda_k - \lambda_k) / \lambda_k^3$.

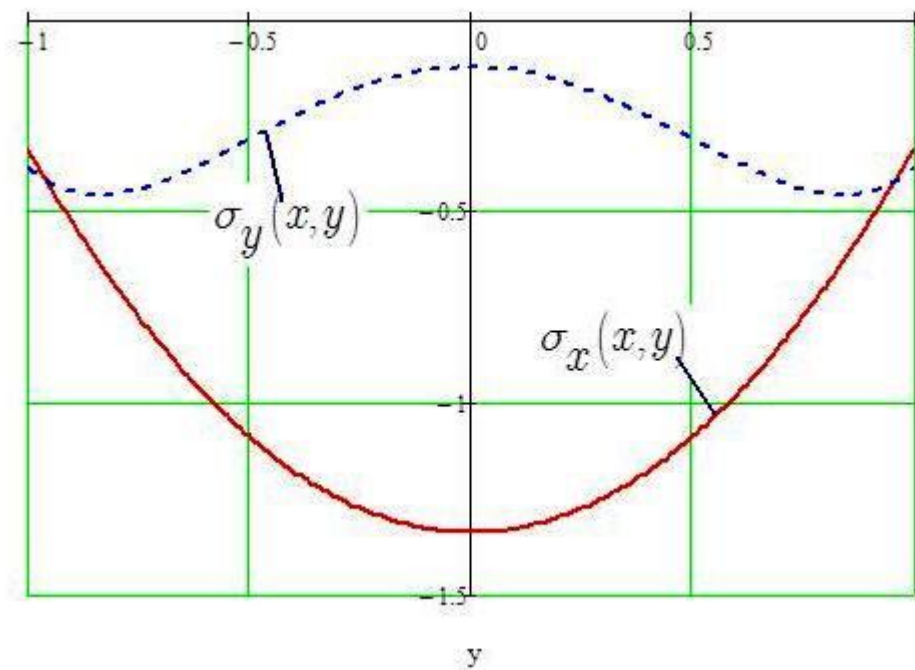


Рисунок 3.8

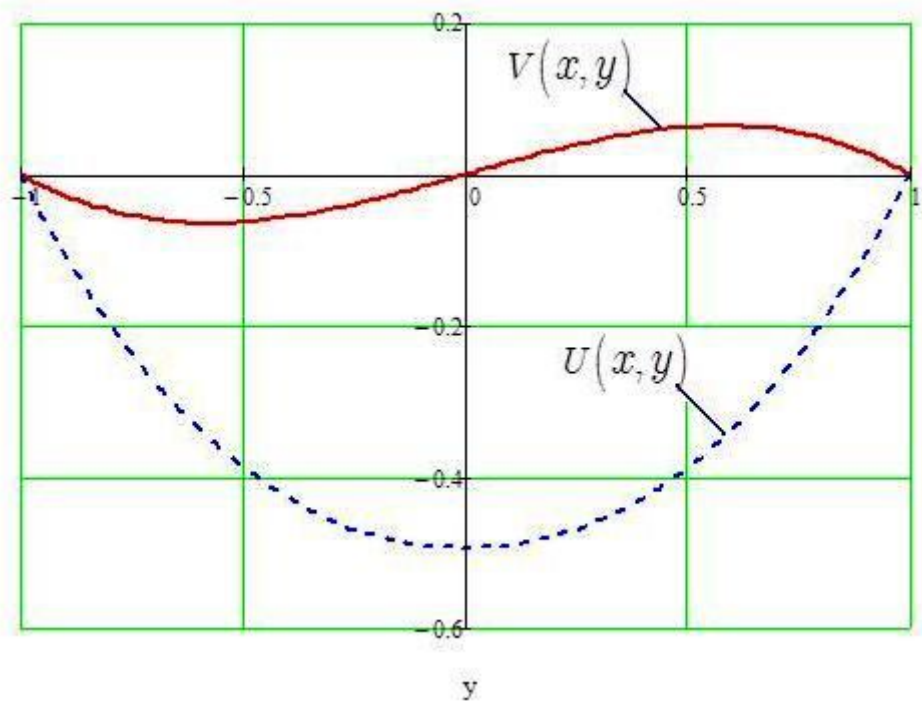


Рисунок 3.9

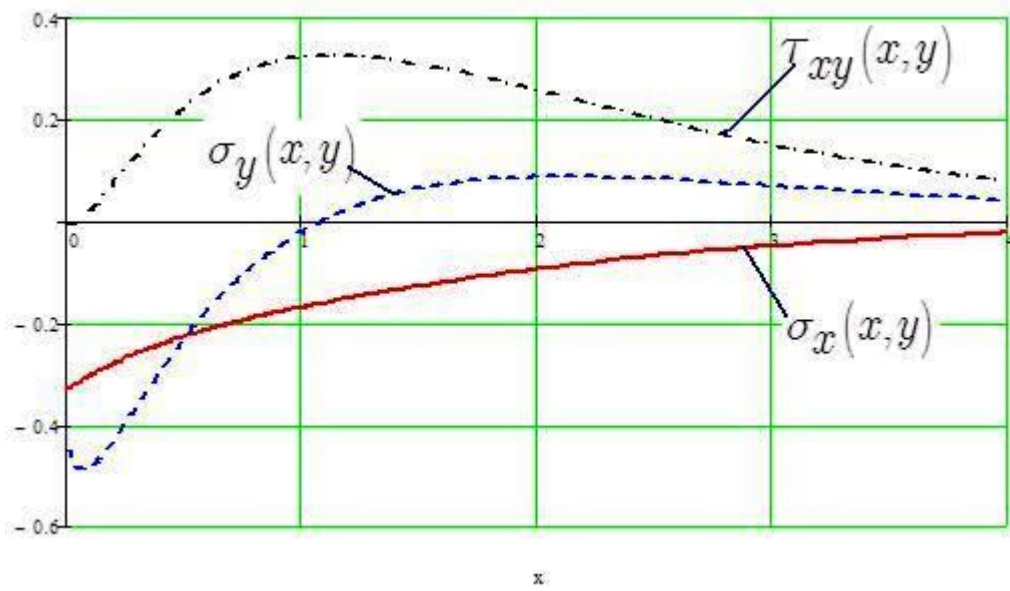


Рисунок 3.10

§ 3.4 Решение для прямоугольника

Найдем формулы для прямоугольника $\{P : |x| \leq a, |y| \leq 1\}$, аналогичные формулам для полуполосы. Будем считать, что задача симметрична относительно осей x, y . Тогда формулы для напряжений и перемещений будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) \sinh \lambda_k x + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) \sinh \bar{\lambda}_k x, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) \cosh \lambda_k x + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) \cosh \bar{\lambda}_k x, \\
 \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) \cosh \lambda_k x + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh \bar{\lambda}_k x, \\
 \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) \cosh \lambda_k x + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) \cosh \bar{\lambda}_k x, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) \sinh \lambda_k x + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \sinh \bar{\lambda}_k x.
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Вместо разложений (3.1.8) на этот раз получим такие разложения:

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) \cosh \lambda_k a + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) \cosh \bar{\lambda}_k a, \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) \sinh \lambda_k a + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \sinh \bar{\lambda}_k a. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

где $\sigma(y)$ и $\tau(y)$ – заданные на торцах прямоугольника $x = \pm a$ нормальные и касательные напряжения. Функции $\sigma(y)$ – четна, а $\tau(y)$ – нечетна. Отсюда, так же, как и для полуполосы, для каждого номера $k \geq 1$ получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_k^* = a_k N_k \cosh \lambda_k a + \overline{a_k N_k} \cosh \bar{\lambda}_k a, \\ \tau_k^* = a_k N_k \lambda_k \sinh \lambda_k a + \overline{a_k N_k \lambda_k} \sinh \bar{\lambda}_k a. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Числа σ_k^* и τ_k^* те же, что и для полуполосы. Решая систему (3.4.3), найдем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\tau_k^* \cosh \bar{\lambda}_k a - \sigma_k^* \bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a}{N_k \delta_k}, \\ \bar{a}_k &= \frac{\sigma_k^* \lambda_k \sinh \lambda_k a - \tau_k^* \cosh \lambda_k a}{\bar{N}_k \delta_k}, \\ \delta &= \lambda_k \sinh \lambda_k a \cdot \cosh \bar{\lambda}_k a - \bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cdot \cosh \lambda_k a. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Подставляя теперь (3.4.1) в (3.4.1), получим окончательное решение рассматриваемой задачи. Однако чтобы получить формулы пригодные для вычислений, из полученных решений нужно выделить нуль – ряды так, как это было сделано в решениях для полуполосы.

Окончательные формулы для напряжений и перемещений в прямоугольнике, аналогичные формулам (3.3.7) и (3.3.8), будут иметь такой вид:

1) на торцах прямоугольника $x = \pm a$ заданы нормальные самоуравновешенные напряжения $\sigma_x(\pm a, y) = \sigma(y)$, а касательные $\tau_{xy}(\pm a, y) = 0$ (аналоги формул (3.3.7)):

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\}, \quad (3.4.5)$$

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\},$$

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\},$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{N_k \lambda_k^2} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\}.$$

2) на торцах прямоугольника $x = \pm a$ заданы касательные самоуравновешенные напряжения $\tau_{xy}(\pm a, y) = \tau_{xy}(y)$, а нормальные $\sigma_x(\pm a, y) = 0$ (аналоги формул (3.3.8)):

$$U(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \cosh \bar{\lambda}_k a \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\}, \quad (3.4.6)$$

$$V(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\operatorname{Im}(\cosh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\},$$

$$\sigma_x(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{N_k} \frac{\operatorname{Im}(\cosh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\},$$

$$\sigma_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{N_k \lambda_k^2} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 \cosh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k N_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \cosh \bar{\lambda}_k a \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k a \cosh \lambda_k a)} \right\}.$$

Выводы: Построено точное аналитическое решение двух краевых задач теории упругости: для полуполосы, у которой продольные стороны защемлены и для прямоугольника с двумя защемленными противоположными сторонами. На торцах полуполосы и прямоугольника заданы нормальные или касательные напряжения. Решения представляются в виде рядов по функциям Фадля - Папковича. Коэффициенты рядов определяются как интегралы Фурье от заданных на торцах напряжений. Полученные ряды сходятся с той же точностью, что и соответствующие тригонометрические ряды. На основе полученных решений легко построить, например, решения задачи о температурных напряжениях в защемленном по двум или четырем сторонам прямоугольнике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты и выводы диссертационной работы:

- 1) определено упругопластическое напряженное состояние неоднородной трубы при различных видах неоднородности
- 2) определено упругопластическое деформированное состояние неоднородной трубы при различных видах неоднородности
- 3) определено предельное состояние толстостенной многослойной трубы, в случае, когда каждый слой обладает своими параметрами анизотропии
- 4) определено предельное состояние толстостенной многослойной трубы, в случае, когда каждый слой обладает своими параметрами неоднородности;
- 5) определено точное аналитическое решение краевой задачи для полуполосы, защемленной по продольным сторонам.

Перспективы дальнейшей разработки темы: В первой и второй главах диссертации исследовано упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности. Приближенно - аналитическим методом определено напряженно-деформированное состояние толстостенной трубы. Изучено влияние параметров неоднородности на положение упругопластической границы. Новые результаты, полученные в работе и учитывающие влияние неоднородности на напряженное состояние толстостенной трубы являются важными и актуальными. Методы решения, использованные в работе могут быть распространены не только на решение плоских, но и пространственных задач. В третьей главе диссертации было впервые получено точное аналитическое решение классической краевой проблемы теории упругости для прямоугольника с двумя защемленными сторонами. Оно построено на основе теории разложений по функциям Фадля-Папковича, основы которой были опубликованы совсем недавно в работах [69, 70]. Проблема реше-

ния краевых задач теории упругости и пластичности в конечных канонических областях с угловыми точками границы и точками смены типа граничных условий относится к числу важнейших. Ее решение не удавалось найти почти 200 лет. В третьей главе достаточно подробно представлена техника решения краевой задачи в прямоугольнике. Эта техника может быть перенесена в цилиндрическую систему координат. И тогда задачи, рассмотренные в первых двух главах диссертации, могут быть решены для труб конечной длины, точные аналитические решения для которых пока не известны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. О некоторых смешанных задачах теории упругости для полуполосы // Изв. АН АрмССР, мех., 23. №3. 1970. С. 3–13.
2. Алимжанов М. Т., Естаев Е. К. Упругопластическое состояние плоскости, ослабленной круговым отверстием // Механика деформируемого твердого тела. 1982. С. 105-115.
3. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенатов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985. 142 с.
4. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
5. Беляев Н. М., Синицкий А. К. Напряжения и деформации в толстостенных цилиндрах. – Изв. АН СССР, ОТН, 2,4,6, 1938.
6. Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. – Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.
7. Быковцев Г. И., Лаврова Е. Б. Модель анизотропно упрочняющейся среды, имеющей различные законы упрочнения при растяжении и сжатии // Известия АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 149–151.
8. Быковцев Г. И. О кручении призматических стержней из анизотропного идеально пластического материала // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 3. С. 151–157.
9. Быковцев Г. И. О плоской деформации анизотропных идеальнопластических тел // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 66–74.
10. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. 527 с.
11. Васильева А. М. Определение напряженного состояния анизотропного пространства, ослабленного полостью // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – Чебоксары, 2007. № 1. С. 26–32.

12. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики // М.: Стройиздат, 1975. 224с.
13. Ворович И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 109–115.
14. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты // ПММ. 1967, вып. 31. С. 230–241.
15. Вульман С. А., Семькина Т. Д. Напряженно-деформированное состояние пластины с включением // Прикладные задачи механики сплошных сред. - Воронеж, 1988. С. 48–51.
16. Вульман С. А. О решении осесимметричных упругопластических задач методом малого параметра // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 3. С. 164–169.
17. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача // Прикладная математика и механика, 1946. Т. 10. Вып. 3. С. 367–386.
18. Галин Л. А. Упруго-пластические задачи. – М.: Наука, 1984. 232 с.
19. Гениев Г. А., Курбатов А. С., Самедов Ф. А. Вопросы прочности и пластичности анизотропных материалов. – М.: Интербук, 1993. 183 с.
20. Гениев Г. А. Об уравнениях статики и кинематики анизотропной пластической среды при сопротивлении отрыву // Строительная механика и расчет сооружений. 1983. № 2. С. 14–18.
21. Гениев Г. А. Плоская деформация анизотропной идеально-пластической среды // Строительная механика и расчет сооружений. 1982. № 3. С. 14–18.
22. Гениев Г. А. Плоская деформация анизотропной сыпучей среды // Строительная механика и расчет сооружений. 1986. № 5. С. 33–35.
23. Геогджаев В. О. Пластическое кручение анизотропных стержней // Труды МФТИ. 1959. Вып. 3.

24. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости [Текст] / Гольденвейзер А. Л. // ПММ. -1962. Т. 26. -Вып. 4. С. 668-686.
25. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с
26. Гофман О., Закс Г. Введение в теорию пластичности для инженеров. – М.: Машгиз, 1957. 279 с.
27. Григорьев О. Д. Некоторые задачи теории пластичности неоднородных тел. – Новосибирск. 1969, 207 с.
28. Гринченко В. Т. Задача термоупругости для полуполосы. Тепловые напряжения в элементах конструкций. – Киев: Наукова Думка, 1973. Вып. 13. С. 86–91.
29. Гузь А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок // Киев: Наукова думка, 1977. 203 с.
30. Гусейн-Заде М. И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1985. Т. 29. Вып.4. С. 452–759.
31. Гусейн-Заде М. И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1985. Т. 29. Вып. 2. С. 393–399.
32. Даниловская В. И. Приложение вариационного начала Кастильяно к плоской задаче термоупругости // Прикл. механика, 1968, т. 4, Р 12, с. 33-39.
33. Друянов Б. А., Непершин Р. И. Теория технологической пластичности. – М.: Машиностроение, 1990. 272 с.

34. Друянов Б. А. Вдавливание шероховатого штампа в тонкую пластически неоднородную полосу // Изв. АН СССР, Механ. и машиновед. № 4. 1960. С. 156–158
35. Друянов Б. А. Численное решение задачи о вдавливании шероховатого штампа в пластически неоднородную полуплоскость // Изв. АН СССР, Механ. и машиновед. № 3. 1961.
36. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. Упругопластическое напряженное состояние полого тора, находящегося под действием равномерного давления // Известия АН СССР. ОТН. 1957. № 7. С. 129–131.
37. Задоян М. А. О течении пластически неоднородного материала через сходящийся канал // Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н. №2. 1962
38. Задоян М. А. Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления // Изв. АН СССР, ОТН. Вып. 4. 1962
39. Зубчанинов В. Г. Проблемы теории пластичности // Проблемы механики: сб. статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. С. 394–405.
40. Ивлев Д. А. О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (66). С. 57–63.
41. Ивлев Д. А. О несущей способности составных анизотропных цилиндров под действием внутреннего давления // Чуваш. гос. пед. ун-т. Чебоксары, 2010, 7 с., Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 23.04.10 № 223-В2010).
42. Ивлев Д. А. Об анизотропии пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (66). С. 64–68.
43. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии // ПММ. 1959. Вып. 6.

44. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М.: Наука, 1978. 208 с.
45. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. – М.: Физматлит, 2002. Т. 1. 448 с.
46. Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). Ч. 3. С. 580–582.
47. Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). Ч. 3. С. 583–584.
48. Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). Ч. 3. С. 576–579.
49. Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. Об условиях анизотропии идеальнопластических тел // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). Ч. 3. С. 571–575.
50. Ивлев Д. Д. Предельное состояние деформированных тел и горных пород [Текст] / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. – М.: Физматлит, 2008. – 832 с.
51. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
52. Ивлев Д. Д., Григорьев И. П. О сдавливании круглого в плане идеальнопластического слоя шероховатыми плитами // Известия РАН, МТТ, 2000, № 1.
53. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела // Учёные записки МГУ. 1940. вып. 39. С. 3–81.
54. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.

- 55.Ильюшин А. А. Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1960. Т.24. В. 3. С. 399–411.
56. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. О прочности оболочек, толстостенного цилиндра и полого шара, подвергнутых облучению // Инж. сб. АН СССР, 1960, т. 28.
- 57.Ильюшин А. А. Нормальное и касательное напряжение при чистом изгибе балки за пределом упругости и аналогия с задачей об изгибе плит // Инженерный сборник. 1954. Т. 19. С. 3–12.
58. Инденблом В. Л., Данилевская В. И. Новый класс точных решений бигармонической задачи полуполосы // ДАН СССР. 1968. Т. 180, № 6. С. 1319–1322.
- 59.Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 700 с.
- 60.Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // Прикладная математика и механика. 1943. Т. 7, вып. 2. С. 109–130.
- 61.Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. 1954. Т. 6, № 3. С. 314–325; Прикладные задачи механики. Т. 1. М.: Наука, 1986. С. 84–103.
- 62.Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. 420 с.
- 63.Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 74 – 81.
- 64.Кержаев А. П. Об определении перемещений в двухслойной толстостенной трубе, находящейся под действием внутреннего давления, в случае трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогиче-

- ского университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 68 – 73.
65. Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Двуосное растяжение упругопластического пространства с включением, близким по форме к правильному многоугольнику среды // Вестник Воронежского университета. Серия 2, Естественные науки. - 1998. № 3. С. 136–141.
66. Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Яковлев А. Ю. Двухосное растяжение упругопластического пространства с включением близким по форме к правильному многоугольнику среды // Механика-99: материалы 2 Белорус, конгресса по теорет. и прикл. механике, 28-30 июня 1999 г., Минск, Беларусь. - Минск, 1999. С. 85–86.
67. Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. О нахождении поля напряжений в эксцентричной трубе, подверженной действию внутреннего давления // Вестник факультета прикладной математики и механики. 1998. № 1. С. 85–90.
68. Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Яковлев А. Ю. Двухосное растяжение упругопластического пространства с призматическим включением среды // НАН Украины. Прикладная механика. 2000. Т. 36, № 6. С. 114–120.
69. Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
70. Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы. – Чебоксары: изд-во Чуваш. гос. пед. ун-та, 2014. 123 с.
71. Копасенко В. В. Исследование алгебраической системы бесконечного порядка, возникающей при решении задачи для полуполосы // ПММ. 1968. Т.37. Вып. 4. С. 715–723.
72. Кузнецов А. И. Кручение неоднородных пластических стержней // Изв. АН СССР. ОТН. Вып. 11. 1958

73. Кузнецов А. И. Плоская деформация неоднородных пластических тел // Вестн. Ленингр. ун-та. – № 13. – 1958. – С. 112–131
74. Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М. К построению теории идеальной пластичности ортотропных сред // Проблемы механики неупругих деформаций : сб. статей к 75-летию Д. Д. Ивлева. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001. С. 166–172.
75. Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М. Условие полной пластичности квазинесжимаемых ортотропных сред // Науч. изд. Проблемы нелинейной механики: сб. статей к 80-летию Л. А. Толоконникова. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2003. С. 195–205.
76. Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эксцентрическим эллиптическим включением, при двуосном растяжении // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. №8 / 2 (67). С. 90–97.
77. Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двуосном растяжении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 134–141.
78. Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние плоскости, подкрепленной эксцентрическими включениями, при двуосном растяжении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. 2009. № 2 (62). С. 13–18.
79. Ленский В. С. Влияние радиоактивных облучений на механические свойства твердых тел // Инженерный сборник. 1960. Т. 28.
80. Литл Р. Задача о полуполосе с заделанными краями // Прикладная механика. 1969. № 2. С. 184–186.
81. Максимова Л. А., Матвеев С. В., Тихонов С. В. О сжатии анизотропного идеально пластического слоя при обобщенном условии пластичности Мизе-

- са // Современные проблемы математики, механики, информатики : материалы Междунар. науч. конф. Тула, 2006. С. 151–153.
82. Максимова Л. А., Тихонов С. В. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 91–95.
83. Матченко И. Н. Основные соотношения теории идеальной пластичности квазинесжимаемых анизотропных сред // Изв. ТулГУ. Серия : Строительные материалы, конструкции и сооружения. Вып. 7. - Тула : Изд-во ТулГУ. 2003. - С. 180-187.
84. Матченко Н. М. Вариант построения теории пластичности ортотропных сред // Изв. ТулГУ. Серия : Машиностроение. Вып. 7. Тула : Изд-во ТулГУ. 2002. С. 23–32.
85. Матченко Н. М., Митяев А. Г., Фейгин С. Д. Влияние начальной пластической анизотропии на напряженное состояние пластины с отверстием // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула, 1980. С. 14–19.
86. Матченко Н. М., Толоконников Л. А. Плоская задача теории идеальной пластичности анизотропных материалов // Известия АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 169–170.
87. Миронов, Б. Г. К теории анизотропной идеально-пластической среды // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. М., 2003. С. 564–568.
88. Надаи А. Пластичность // ОНТИ НКТП. 1936. С. 158.
89. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 648 с.
90. Немировский Ю. В., Андреева А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость и колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.

91. Никитин А. В., Коваленко М. Д. Полуполоса, защемленная по продольным сторонам. Точное аналитическое решение // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 193–203.
92. Никитин А. В., Миронов Б. Г. Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 58–67.
93. Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние многослойной трансляционно-анизотропной трубы // III международной научно-практической конференции «Приоритетные направления развития науки и образования»: сборник материалов, 2014. С. 35–42.
94. Никитин А. В., Тихонов С. В. Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). Ч. 2 С. 137–147.
95. Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние плоскости из анизотропного материала с эллиптическим отверстием // XIV Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики»: сборник материалов, 2013. С. 117–122.
96. Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). Ч. 2. С. 148–155.
97. Никитин А. В. Аналитическое решение для полуполосы, защемленной по продольным сторонам // Сборник материалов VIII региональной научно – практической конференции студентов, аспирантов, ученых и специалистов. 2014. С. 19–21.

98. Никитин А. В. Определение деформированного состояния толстостенной линейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3 (17). С. 142–150.
99. Никитин А. В. Определение деформированного состояния толстостенной нелинейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 60–70.
100. Никитин А. В., Миронов Б. Г. Определение перемещений в пластической и упругой областях в толстостенной неоднородной трубе при трансляционной анизотропии // Сборник статей по материалам XIV международной заочной научно-практической конференции "Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии". – 2014. - №2(14). – С. 93-106.
101. Никитин А. В., Коваленко М. Д. Полуполоса, защемленная по продольным сторонам. Аналитическое решение // Сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: в 2 ч. Ч. 2. 2014. С. 97–100.
102. Никитин А. В., Тихонов С. В. Предельное состояние многослойной трансляционно-анизотропной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 88–94.
103. Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 60–70.
104. Никитин А. В., Тихонов С. В. Предельное состояние слоистой трансляционно-анизотропной трубы // Сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: в 2 ч. Ч. 2. 2014. С. 101–104.

105. Никитин А. В., Кержаев А. П., Лапикова Е. С., Юринкина М. Н., Иглин Е. Н. Разложения Лагранжа в периодической задаче для полуполосы с продольными ребрами жесткости // Сборник материалов X Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. 2014. С. 378–380.
106. Никитин А. В. Упругопластическое состояние нелинейно-неоднородной трубы в случае при трансляционной анизотропии // Сборник статей по материалам XVII международной научно-практической конференции "Естественные и Математические науки в современном мире". 2014. № 4 (16). С. 31–44.
107. Никитин, А. В. Упругопластическое состояние неоднородной трубы из анизотропного материала, находящейся под действием внутреннего давления // Сборник статей по материалам XIII международной научно-практической конференции "Естественные и Математические науки в современном мире". 2013. № 12 (12). С. 77–84.
108. Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние плоскости с эллиптическим отверстием при трансляционной анизотропии // Сборник статей по материалам международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф.: в 2 ч. Ч. 1. 2013. С. 214–220.
109. Никитин А. В., Кержаев А. П., Лапикова Е. С., Юринкина М. Н. Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. Разложения Лагранжа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 86–103.
110. Никитин А. В., Кержаев А. П., Лапикова Е. С., Юринкина М. Н. Разложения Лагранжа в периодической задаче для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 68–85.

111. Огибалов П. М. Деформация трубы под действием внутреннего давления и переменной температуры // Инж. сб. АН СССР, 1954. №20
112. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. – М.: Мир, 1964. 156 с.
113. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Доклады АН СССР. 1940. Т. 27. № 4.
114. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. – М.: Иностранная литература, 1956. 398 с.
115. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1958. 136 с.
116. Победря Б. Е. Деформационная теория пластичности анизотропных сред // Прикл. математика и механика. 1984. № 4. С. 29–37.
117. Ремнев Ю. И. О влиянии облучения на напряжения и малые деформации в твердом теле // ДАН СССР, 1959, т. 124, № 3.
118. Рыхлевский, Я. О произвольно малой пластической неоднородности // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. 1963. Т. 11. № 6.
119. Семькина Т.Д. О трехосном растяжении упругопластического пространства, ослабленного сферической полостью // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. №1. С. 17–21
120. Соколов А. П. Об упругопластическом состоянии пластинки // Доклады Академии наук АН СССР. 1948. Т. 10, № 5. С. 33–36.
121. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. – М. : Изд. АН СССР, 1942. 272 с.
122. Соколовский, В. В. Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
123. Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи упруго-вязкопластичности с неизвестной границей. – Воронеж: Воронеж, гос. ун-т, 2004. 219 с.
124. Спорыхин А. Н., Чиканова Е. Н., Ковалев А. Н. К определению поля напряжений в пластинах с отверстиями различных очертаний // Информационные технологии и системы. 1994. Ч. 3. С. 11–15.

125. Спорыхин А. Н. К устойчивости горизонтальных выработок в массивах, обладающих упруго-вязкопластическими свойствами // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1975. № 1. С. 67–72.
126. Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. – Воронеж: Изд-ние ВГУ, 1997. 361 с.
127. Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесие пространственных тел и задачи механики горных пород. – М.: Физматлит, 2004. 231 с.
128. Сучеван В. Г. Термоупругие напряжения упругого параллелепипеда // Прикладная математика и программирование. Кишинев. 1972. С. 156.
129. Тарабасов Н. Д. Определение напряжений в некоторых плоских, упругих и однородных средах, составленных из тел, соединенных между собою посредством посадки // Инженерный сборник. 1947. Т. 3, в. 2. С. 3–14.
130. Тихонов С. В. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящийся под действием внутреннего давления // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 161–168.
131. Тихонов С. В. Об упругопластическом состоянии пространства, ослабленного эллипсоидальной полостью при предельном сопротивлении отрыву // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. 2007. № 3 (55). С. 28–35.
132. Тихонов С. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из неоднородного материала под действием внутреннего давления // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 6 (56). С. 13–21.
133. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Высш. шк., 1979. 318 с.
134. Толоконников Л. А., Яковлев С. П., Кузин В. Ф. Плоская деформация со слабой пластической анизотропией // Прикладная механика. 1969. Т. 5, № 8. С. 71–76.
135. Трапезников Л. И. Линии влияния для нормальных напряжений в полуполосе // Изв. ВНИИ гидротехники. 1963. Т. 73. С. 271–278.

136. Филоненко, Бородич, М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях // 1951, т. 15, вып. 2.
137. Фоминых С. О. Двуосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). Ч. 3. С. 610–622.
138. Фоминых С. О. Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). Ч. 3. С. 623–627.
139. Фоминых С. О. Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). С. 201–216.
140. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
141. Целистова Е. А. Задача о напряженном состоянии неоднородного идеальнопластического слоя // Сб. научных трудов студентов, аспирантов и докторантов ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 1999. Вып. 5. Т. 1. С. 12–13.
142. Целистова Е. А. Исследование влияния неоднородности материала на напряженное состояние идеальнопластического слоя // Известия ИТА ЧР. – Чебоксары, 1999. С. 52–56.
143. Целистова Е. А. О влияние неоднородности на напряженное состояние слоя из идеальнопластического материала // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: Тез. докл. Всерос. науч. сем. – Пермь: ПермГТУ, 1999. С. 53.
144. Черепанов Г. П. Об одном методе решения упругопластической задачи // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 428–436.

145. Hill, R. On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid // J. Mech. and Phys. Solids. № 4. 1956. P. 247–255
146. Olszak W. Non-homogeneity in elasticity and plasticity, Proc. I. U. T.A.M. Symposium, Warsaw, 1958; Pergamon Press, London, New York, Paris, 1959.
147. Olszak W. Limit analysis and design of non-homogeneous spherical and cylindrical shell // Inzyn. Bydown. 14. 1957
148. Olszak W. Plastic non-homogeneity // Theory and applications, Symposium on Plasticity, Varenna. 1956
149. Olszak W. Theory of plasticity of non-homogeneous bodies and its practical applications // Proc. 1st Congr. Theor. Appl. Mech. Kharagpur (India). 1955
150. Olszak W. Thick-walled structures // Przegl. Górn. Hutn. 54. № 12. 1936.
151. Olszak W., Zahorski S. Some problems of continued plastic flow of the eccentric cylinder, Arch. Mech. Stos. 12. N 5/6. 1960.
152. Theocaris P. S. The stress distribution in a semi-infinite strip subjected to a concentrated load // J. of Appl. Mech., Trans. ASME, ser.E, 1959» vol.26.